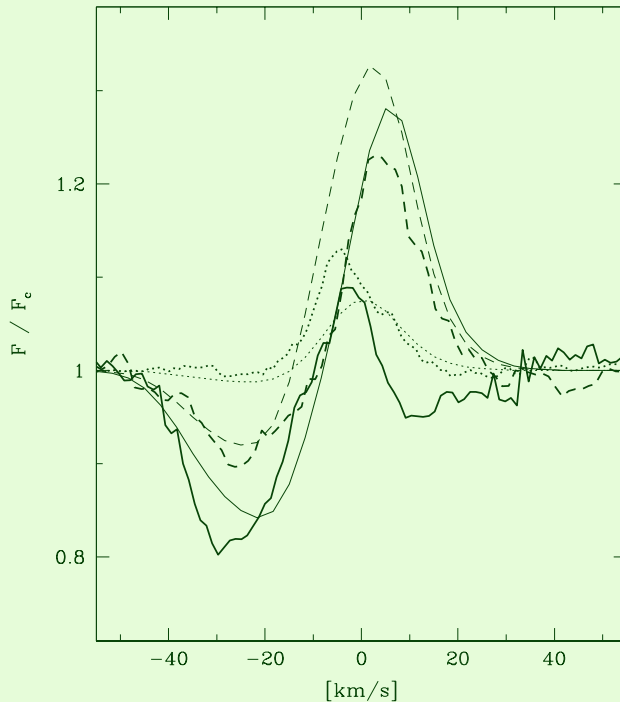


Krzysztof Gęsiński

Fizyka otoczek wokółgwiazdowych

teoria widma liniowego i rozpędzanie wiatrów



Toruń 2007

Krzysztof Gęsicki

Fizyka otoczek wokółgwiazdowych:

teoria widma liniowego i rozpędzanie wiatrów.



Toruń 2007

Recenzenci
Kazimierz Stępień
Antoni Stawikowski

Projekt okładki
Krzysztof Gęsicki

ISBN 978-83-231-2064-3

Printed in Poland
© Copyright by Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika
Toruń 2007

praca dofinansowana przez stypendium UMK nr M/2/2004

WYDAWNICTWO UNIWERSYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

87-100 Toruń, ul. Gagarina 39

Redakcja: tel. (056) 611 42 95

e-mail: dwyd@uni.torun.pl

Dystrybucja: tel./fax (056) 611 42 38

e-mail: ksiazki@umk.pl

www.uni.torun.pl/wyd

Wydanie I. nakład 200 egz.

Skład i łamanie w wykonaniu Autora

Druk: Zakład Poligrafii UMK

Spis treści

Wstęp	7
1 Przepływ promieniowania	9
1.1 Natężenie promieniowania	9
1.2 Równanie przepływu promieniowania	13
1.2.1 Przepływ promieniowania i atom dwupoziomowy . . .	13
1.2.2 Przepływ promieniowania ogólniej	16
1.2.3 Rozwiązywanie w prostych przypadkach	21
1.2.4 Rozwiązywanie formalne	21
1.3 Obliczanie obsadzeń poziomów	22
1.3.1 Równania równowagi statystycznej	22
1.3.2 Lokalna równowaga termodynamiczna (LTE)	26
1.4 Profile linii oraz pełna redystrybucja	28
1.4.1 Profil absorpcyjny	28
1.4.2 Profil emisyjny	31
1.4.3 Pełna (całkowita) redystrybucja	34
1.5 Funkcja źródłowa dla linii widmowych	35
1.5.1 Atom dwupoziomowy w pełnej redystrybucji	36
1.5.2 Atom dwupoziomowy w LTE	38
1.5.3 Atom trójpoziomowy	39
1.5.4 Atom dwupoziomowy z kontinuum	41
1.6 Inne charakterystyki pola promieniowania	42
1.6.1 Funkcja dystrybucji fotonów	42
1.6.2 Gęstość energii promieniowania	42
1.6.3 Strumień	43
1.6.4 Ciśnienie promieniowania	45
1.6.5 Momenty Eddingtona	46

2	Dyskusja jakościowa widma liniowego	47
2.1	Przebieg funkcji źródłowej w atmosferze	47
2.2	Droga termalizacji fotonu	49
2.3	Nateżenie na powierzchni atmosfery	49
2.4	Ciekawe proste przypadki	53
2.4.1	Chromosfera gwiazdowa	53
2.4.2	Warstwa płasko-równoległa optycznie cienka	54
2.4.3	Warstwa płasko-równoległa optycznie gruba	55
2.5	Atom trójpoziomowy	56
3	Rozwiązywanie równania przepływu	60
3.1	Promieniowanie kontinuum	60
3.1.1	Warunek równowagi promienistej	60
3.1.2	Równanie dyfuzyjne	61
3.1.3	Przybliżenie Eddingtona	63
3.1.4	Średni współczynnik nieprzezroczystości	64
3.1.5	Atmosfera szara	66
3.2	Rozwiązywanie numeryczne	68
3.2.1	Metoda Feautrier	69
3.2.2	Metoda zmiennego czynnika Eddingtona	73
3.3	Widmo liniowe	75
3.3.1	Równanie Milne-Eddingtona	75
3.3.2	Krzywa wzrostu	79
3.3.3	Wyznaczanie obfitości metodą krzywej wzrostu	82
3.4	Modele atmosfer gwiazdowych	83
3.4.1	Zagadnienie ogólne	83
3.4.2	Modele atmosfery szarej	85
3.4.3	Modele Kurucza	86
3.4.4	Modele non-LTE	88
3.4.5	Częściowa redystrybucja	89
3.4.6	Czego nadal nie wiemy o Słońcu	90
4	Hydrodynamika otoczek	93
4.1	Podstawowe pojęcia hydrodynamiczne	93
4.2	Równania hydrodynamiki	94
4.2.1	Równanie ciągłości	95
4.2.2	Równanie pędu	95
4.2.3	Przykłady zastosowań	96
4.2.4	Równanie energii	99
4.3	Bilans energii dla wiatrów gwiazdowych	101

4.4	Rodzaje wiatrów gwiazdowych	104
5	Wiatry rozpędzane promieniowaniem	106
5.1	Wiatry rozpędzane liniami widmowymi	106
5.1.1	Najprostszy model gwiazdy z otoczką	106
5.1.2	Przepływ promieniowania w ekspandujących atmosferach	108
5.1.3	Przybliżenie Soboleva	109
5.1.4	Rozpędzanie wiatru liniami	112
5.2	Wiatry gwiazd Wolfa-Rayeta	114
5.2.1	Gwiazdy WR	115
5.2.2	Problem pędu	116
5.2.3	Modele	121
5.3	Wiatry rozpędzane pyłem	122
5.3.1	Ziarna pyłu	123
5.3.2	Rozważania pędowe	123
5.3.3	Łączony przepływ gazu i pyłu	124
5.3.4	Hybrydowy wiatr czerwonych olbrzymów	125
5.4	Wiatry gwiazd AGB	126
5.4.1	Gwiazdy asymptotycznej gałęzi olbrzymów	126
5.4.2	Skład chemiczny	127
5.4.3	Zmienność	127
5.4.4	Utrata masy	128
5.4.5	Model standardowy gwiazdy AGB	129
5.4.6	Emisja termiczna pyłu	130
5.4.7	Fotometria podczerwona	132
5.4.8	Modelowanie widma gwiazd AGB	132
5.4.9	Linie emisyjne wzbudzone termicznie	134
	Zakończenie	135
	Bibliografia	136
	Indeks	139

Wstęp

Bardzo ciekawe rozważanie dotyczące źródła naszej wiedzy o wszechświecie podają astrofizycy Masiewicz i Tutukow we wstępie do książki [22] opisującej ewolucję gwiazd. Załóżmy, że całkowita powierzchnia zwierciadeł wszystkich teleskopów dostępnych astrofizykom wynosi 100 m^2 oraz że czas wykorzystania tej powierzchni wynosi 50 lat. Można obliczyć, że całkowita energia fotonów zebranych w ciągu tego czasu obserwacji przez zwierciadła teleskopów wyniesie około 10^{10} ergów. Urządzenia rejestrujące wychwycą tylko około 1% tej wartości. Chcąc przedstawić otrzymaną wielkość w sposób obrazowy, przeznaczymy tę energię na ogrzanie szklanki wody. Okazuje się, że jej temperatura wzrośnie o 0.1°C . Dochodzimy do wniosku, że 10 kalorii leży u podstaw współczesnej astrofizyki. Wspomniana książka pochodzi z lat 80-tych. Obecnie powierzchnia zwierciadeł teleskopów jest większa, powiększyła się także i liczba zarejestrowanych fotonów. Tym niemniej są to zadziwiająco małe ilości energii w porównaniu z naszym życiem codziennym.

Ponieważ astrofizyka może badać tylko takie informacje, jakie do nas niezależnie od naszej woli docierają (nie możemy przeprowadzać eksperymentów na gwiazdach czy galaktykach), a także ponieważ energia fotonów niosących informacje jest, jak oszacowaliśmy, niezwykle mała, trzeba stosować bardzo wyrafinowane metody badań. Jedną z nich jest spektroskopia. Obecnie istniejące instrumenty dostarczają wysokiej jakości widm dla szerokiej gamy obiektów astrofizycznych. Współczesna interpretacja obserwacji spektroskopowych polega na porównaniu ich z widmami obliczonymi przy zastosowaniu jakiegoś modelu teoretycznego. W ten sposób krok po kroku poznajemy Wszechświat.

Oczywiście cel niniejszej publikacji jest znacznie skromniejszy. Zamierzeniem autora pracy jest zapoznanie czytelnika (studenta) z podstawami teoretycznymi niezbędnymi do czytania publikacji naukowych z dziedziny atmosfer i wiatrów gwiazdowych. Omówione zostaną najważniejsze procesy oraz opisujące je równania. Podane będą przykłady pomagające uchwycić ukrytą za wzorami naturę. Metody rozwiązywania będą zaledwie na-

szkicowane. Na podstawie wybranych najnowszych publikacji omówione zostaną zastosowania teorii do badania rzeczywistych obiektów. Bez wnikania w szczegóły, które, mam nadzieję, czytelnik sam zrozumie czytając prace oryginalne.

Tekst ten powstał na podstawie wykładów z Fizyki Atmosfer Gwiazdowych od wielu lat prowadzone przez autora dla studentów astronomii UMK. W tej dziedzinie brakuje literatury w języku polskim, ostatnią książką poświęconą przepływowi promieniowania jest skrypt K. Stępnia z 1983 roku [32]. Opracowana przeze mnie książka trochę wypełnia tę lukę.

W tekście konsekwentnie stosowany jest układ cgs jednostek jako powszechnie przyjęty w astrofizyce.

Rozdział 1

Przepływ promieniowania

Zanim dojdziemy do opisu najnowszych rezultatów badań wiatrów i otoczek wokółgwiazdowych zajmiemy się podstawami teoretycznymi umożliwiającymi zrozumienie zjawisk dotyczących oddziaływania promieniowania z materią i metod ich badania.

Jednym z podstawowych pojęć astrofizyki teoretycznej jest przepływ promieniowania przez ośrodek gazowy, np. przez wnętrze gwiazdy, atmosferę gwiazdy, mgławicę wokółgwiazdową. Przepływ omówiony zostanie szczegółowo na przykładzie atomu dwupoziomowego, czyli sytuacji prowadzącej do powstawania linii widmowych. Ogólniej omówimy przepływ w widmie ciągłym (tzw. kontinuum) oraz w bardziej złożonych przypadkach. Dla matematycznego opisu tego zjawiska wprowadzane jest w podręcznikach równanie przepływu promieniowania. Rozwiązywać je trzeba jednocześnie z równaniami opisującymi stan gazu (tzw. równaniami równowagi statystycznej). Uwzględnienie wszystkich oddziaływań jest praktycznie niemożliwe, więc wprowadzane są rozmaite przybliżenia. Jest to równanie różniczkowe, choć gdy przyjrzymy mu się dokładniej, okaże się ono równaniem różniczkowo-całkowym, do rozwiązywania którego stosować trzeba metody numeryczne.

1.1 Natężenie promieniowania

Spróbujmy opisać zjawiska dotyczące wąskiej wiązki promieniowania, czyli światła o zadanej częstotliwości ν i biegnącego w kierunku $\vec{\omega}$ w czasie t . Musimy umieć pogodzić makroskopowy opis promieniowania z jego kwantowo-mechaniczną naturą, co czasem prowadzi do trudności. Matematycznie określona linia prosta ma grubość zero i możemy nie znaleźć żadnego fotonu poruszającego się w kierunku wyznaczonym przez prostą. Zatem powinniśmy przyjąć, że „kierunek” nie oznacza matematycznej linii prostej czy

wektora, lecz pewien nieskończenie mały kąt bryłowy $\delta\omega$ wokół kierunku określonego wektorem $\vec{\omega}$. Podobnie chwila t to właściwie mały przedział czasu δt „wokół” wartości t , a częstość promieniowania zawiera się w przedziale $\delta\nu$ „wokół” ν . Zupełnie analogicznie nie będziemy określać energii fotonów przechodzących przez dany punkt s , tylko przez element powierzchni δA umieszczony w tym punkcie. W pracy będziemy odnosić się często do pojęcia wiązki promieniowania $(\nu, \vec{\omega})$, jej także dotyczy powyższa dyskusja przedziałów wokół konkretnych wartości.

Pole promieniowania możemy opisywać przez

- natężenie promieniowania I_ν
- funkcję dystrybucji fotonów f_R
- gęstość energii promieniowania u_ν

Najważniejsza dla nas jest definicja pierwszej z tych wielkości, o drugiej i trzeciej wspomnimy w dalszej części. Zdefiniujemy **natężenie promieniowania**

$$I_\nu \equiv I(s, t, \nu, \vec{\omega}) \quad (1.1)$$

w taki sposób, że ilość energii dE przenoszona przez wiązkę $(\nu, \vec{\omega})$, w czasie dt , przez element powierzchni dA prostopadły do $\vec{\omega}$, jest równa

$$dE = I_\nu dA dt d\omega d\nu \quad (1.2)$$

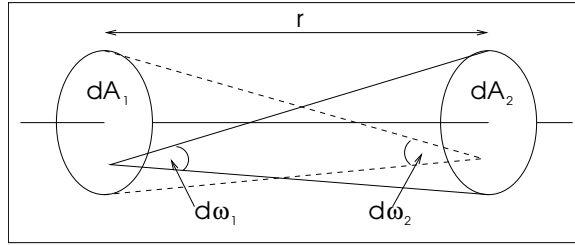
Czyli energia jest proporcjonalna do powierzchni dA , przez którą promieniowanie przechodzi, przedziału czasu dt , kąta bryłowego $d\omega$, w którym rozchodzi się promieniowanie i przedziału częstości $d\nu$. Natężenie I_ν jest po prostu współczynnikiem proporcjonalności.

Można także definiować natężenie promieniowania jako granicę ilorazu, czyli w postaci formuły dobrze znanej z rachunku różniczkowego

$$I_\nu = \lim_{\substack{\Delta A \rightarrow 0 \\ \Delta \nu \rightarrow 0 \\ \Delta \omega \rightarrow 0 \\ \Delta t \rightarrow 0}} \frac{\Delta E}{\Delta A \Delta \nu \Delta \omega \Delta t} = \frac{dE}{dA d\nu d\omega dt} \quad (1.3)$$

W dalszej części będziemy stosowali opis natężenia promieniowania w funkcji częstości ν , ale równie dobrze można określać natężenie w funkcji długości fali λ

$$I_\lambda = \frac{dE}{dA d\lambda d\omega dt} \quad (1.4)$$



Rysunek 1.1: Stałość natężenia promieniowania wzdłuż promienia. Elementy powierzchniowe dA_1 i dA_2 definiują wiązkę promieniowania. Zaznaczone są kąty bryłowe, w których rozchodzi się promieniowanie opuszczające element powierzchniowy.

Energie dE przy obu opisach muszą być równe, bo dotyczą tej samej wiązki fotonów, zatem

$$I_\nu d\nu = I_\lambda d\lambda \quad (1.5)$$

Ponieważ $d\nu = -(c/\lambda^2)d\lambda$ więc wielkości I_ν i I_λ nie będą jednakowe. Fakt ten jest konsekwencją przyjętej definicji natężenia, zgodnie z którą energię dzielimy przez wielkość przedziału częstości bądź długości fali. Na przykład dla Słońca maksimum rozkładu natężenia promieniowania przypada dla I_λ przy $\sim 4500 \text{ \AA}$ a dla I_ν przy $\sim 8000 \text{ \AA}$.

Tak zdefiniowane natężenie I_ν charakteryzuje się pewną, wcale nie oczywistą, cechą – mianowicie w pustej przestrzeni I_ν **nie zależy od odległości** obserwatora od źródła, czyli nie zależy od miejsca na promieniu. Aby przekonać się o tym, rozpatrzmy nie pojedynczy promień (wektor, linię prostą), bo nie ma to sensu fizycznego, ale rozważmy wiązkę promieniowania przechodzącą przez (i tylko przez) dwa elementy powierzchniowe (rysunek 1.1). Jeśli te elementy będą dostatecznie małe i wystarczająco daleko od siebie, to będą wyznaczały coś, co wyobrażamy sobie jako promień światła (rysunek to tylko karykatura). Ponieważ te same fotony przechodzą przez oba elementy powierzchniowe, więc energię przeniosą taką samą

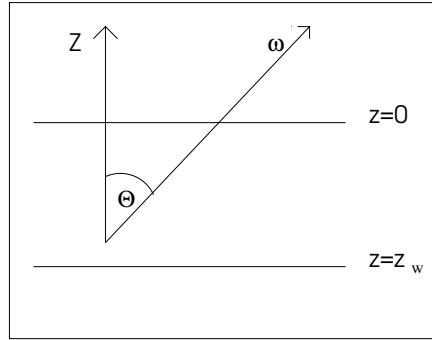
$$dE_1 = I_1 dA_1 d\omega_1 d\nu dt = dE_2 = I_2 dA_2 d\omega_2 d\nu dt \quad (1.6)$$

Z definicji kąta bryłowego wynika, że

$$d\omega_1 = \frac{dA_2}{r^2} \quad \text{i} \quad d\omega_2 = \frac{dA_1}{r^2} \quad (1.7)$$

więc niezależnie od odległości r

$$I_1 = I_2 \quad (1.8)$$



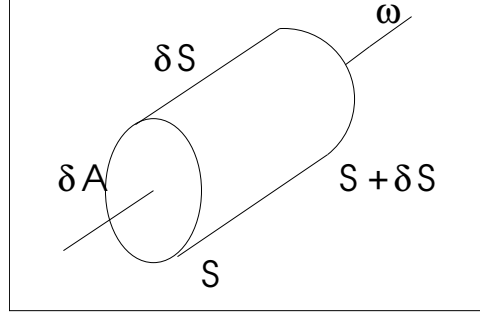
Rysunek 1.2: Warstwa płasko-równoległa o grubości z_w . Osie X i Y układu współrzędnych są równoległe do warstwy, oś Z , prostopadła do warstwy, jest kierunkiem najważniejszym, wzdłuż którego zmieniają się parametry warstwy. Wartość $z = 0$ odpowiada powierzchni warstwy. Kierunek $\vec{\omega}$ rozchodzenia się promieniowania tworzy z osią Z kąt θ .

Właściwość ta wydaje się w sprzeczności z faktem, że światło słabnie ze wzrostem odległości od źródła. Sprzeczność jest pozorna, stałość natężenia wynika z jego definicji (energia w jednostkowym kącie bryłowym), a wielkością zachowującą się „jak należy” jest określony w dalszej części strumień.

Atmosfera płasko-równoległa

W ogólnym przypadku przepływu promieniowania przez gaz należy stosować opis trójwymiarowy. Otoczki wokółgwiazdowe w dobrym przybliżeniu możemy traktować jako sferyczne, co pozwala na uproszczenie opisu oraz stosowanie biegunowego układu współrzędnych. Dalsze uproszczenie możemy wprowadzić zakładając, że grubość atmosfery jest mała w porównaniu z jej promieniem. W takim przypadku, choć atmosfera jest warstwą na sferze, możemy przybliżać ją pojęciem warstwy płasko-równoległej. Jej parametry, takie jak gęstość, temperatura, ciśnienie itp. będą zmieniały się tylko w kierunku osi Z , a w płaszczyźnie XY będą stałe.

Standardowa notacja (rysunek 1.2) jest następująca: oś Z układu współrzędnych wyznacza kierunek pionowy w atmosferze, kąt ϕ to „azymut” w płaszczyźnie XY , a kąt θ to kąt między osią Z a danym kierunkiem $\vec{\omega}$. Całkowanie po kącie bryłowym $d\omega$, po jego pełnym zakresie 4π , rozdziela się na dwie całki: po $d\phi$ oraz po $d\theta$. Ze względu na symetrię wokół osi Z całkowanie względem $d\phi$ można przeprowadzić niezależnie, wynosi ono 2π . Zmienną kątową θ zwykle zastępuje się przez $\mu = \cos \theta$.



Rysunek 1.3: Przepływ promieniowania w wybranym kierunku. Wzdłuż kierunku $\vec{\omega}$ umieszczony jest cylinder o długości δs i o podstawie δA umiejscowionej w punkcie s .

1.2 Równanie przepływu promieniowania

1.2.1 Przepływ promieniowania i atom dwupoziomowy

Zajmijmy się przypadkiem, gdy promieniowanie oddziałuje z atomami mającymi tylko dwa poziomy energetyczne – górny U i dolny L . Jest to olbrzymie uproszczenie, ale pozwala na łatwiejsze zrozumienie najważniejszych procesów. Wspomniane oddziaływanie ograniczone jest do jednej tylko linii widmowej. Choć będziemy formalnie przeprowadzali obliczenia dla pełnego zakresu częstości, to naprawdę istotny jest wąski przedział częstości wokół środka linii.

Aby opisać przepływ promieniowania oddziałującego z materią, wyobraźmy sobie umieszczony w tej materii mały cylinder. Zdefiniowane wcześniej natężenie $I_\nu(s, t, \nu, \vec{\omega})$ opisuje energię wiązki fotonów $h\nu$ o kierunku $\vec{\omega}$, które w chwili t przechodzą przez 1 cm^2 (jednostkę powierzchni) podstawy cylindra umieszczonej w miejscu s (rysunek 1.3). Energia wiązki fotonów wchodzących do cylindra wyniesie $I_\nu(s, t, \nu, \vec{\omega}) \delta A$, a wychodzących $I_\nu(s + \delta s, t + \delta t, \nu, \vec{\omega}) \delta A$. Odnosi się to do tej samej wiązki promieniowania rozchodzącej się w kącie bryłowym $\delta\omega$ i w przedziale częstości $\delta\nu$, która po wejściu do cylindra z jednej strony i po oddziaływaniu z zawartą w nim materią, opuszcza go z drugiej strony odległej o δs . Możemy zrobić bilans

$$[I_\nu(s + \delta s, t + \delta t, \nu, \vec{\omega}) - I_\nu(s, t, \nu, \vec{\omega})] \delta A = \{ZYSK\} - \{STRATA\} \quad (1.9)$$

W polu promieniowania będącym w równowadze z materią, natężenie opiswane jest tzw. funkcją Plancka, zależną tylko od temperatury, więc w szczególnym przypadku izotermicznym bilans będzie zerowy – nie będzie przepływu promieniowania. Nasz bilans tym się różni od równowagowego, że

dopuszczamy możliwość zmiany liczby fotonów na drodze δs . Posłużmy się terminologią wprowadzoną do fizyki przez Einsteina przy wyprowadzaniu wzoru Plancka. Pojawiają się tzw. współczynniki „ A_{UL} ”, „ B_{UL} ” i „ B_{LU} ” Einsteina określające prawdopodobieństwa przejść promienistych. Obliczenie ich wartości liczbowych wymaga zastosowania metod elektrodynamiki kwantowej, wyznaczane mogą być także eksperymentalnie.

Do ZYSKÓW wymienionego wyżej bilansu wchodzi

- emisja spontaniczna, której wkład jest proporcjonalny do
 1. N_U – liczby atomów w górnym stanie energetycznym
 2. $\delta s \delta A$ – objętości cylindra
 3. A_{UL} – współczynnika Einsteina tempa emisji spontanicznej, czyli ilości emisji w jednostce czasu (sekundzie)
 4. $j(\nu, \vec{\omega})$ – funkcji określającej prawdopodobieństwo, że wyemitowany foton będzie miał częstość ν i kierunek $\vec{\omega}$
 5. $\frac{h\nu}{4\pi}$ – energii fotonu podzielonej przez pełen kąt bryłowy, gdyż po lewej stronie bilansu występuje natężenie I_ν , które, jak pamiętamy, jest ilością energii przypadającą na jednostkę kąta bryłowego
- emisja wymuszona, proporcjonalnie do
 1. $N_U \delta s \delta A$, jak poprzednio
 2. $I_\nu(s, t, \nu, \vec{\omega})$ – bo emisja jest wymuszana wiązką fotonów
 3. B_{UL} – współczynnika Einsteina dla emisji wymuszonej (ilość emisji w jednostce czasu to iloczyn $B_{UL} I_\nu$)
 4. $\psi(\nu, \vec{\omega})$ funkcji określającej dla emisji wymuszonej prawdopodobieństwo, że wyemitowany foton będzie miał częstość ν i kierunek $\vec{\omega}$
 5. $\frac{h\nu}{4\pi}$ – jak powyżej, żeby zgadzały się jednostki po obu stronach bilansu

STRATY bilansu promieniowania

- pochodzą z absorpcji, proporcjonalnie do
 1. $N_L \delta s \delta A$ – analogicznie, jak poprzednio, z tym że w procesie bierze udział liczba N_L atomów będących w dolnym stanie energetycznym

2. $I_\nu(s, t, \nu, \vec{\omega})$ – bo absorbowane są fotony z danej wiązki
3. B_{LU} – współczynnika Einsteina absorpcji (liczba absorpcji w jednostce czasu to $B_{LU}I_\nu$)
4. $\phi(\nu, \vec{\omega})$ – funkcji określającej prawdopodobieństwo, że zaabsorbowany zostanie foton o częstotliwości ν i kierunku $\vec{\omega}$
5. $\frac{h\nu}{4\pi}$ – też dla zgodności jednostek

Bilans energii po przejściu promieniowania przez cylinder możemy zapisać

$$\begin{aligned} & I_\nu(s + \delta s, t + \delta t, \nu, \vec{\omega}) - I_\nu(s, t, \nu, \vec{\omega}) = \\ &= \frac{h\nu}{4\pi} N_U A_{UL} j \delta s + \frac{h\nu}{4\pi} B_{UL} N_U I_\nu \psi \delta s - \frac{h\nu}{4\pi} B_{LU} N_L I_\nu \phi \delta s \end{aligned} \quad (1.10)$$

Rozwijamy następnie $I_\nu(s + \delta s, t + \delta t)$ w szereg Taylora, korzystamy z zależności $\delta s = c\delta t$, zostawiamy składniki z pierwszymi pochodnymi, pomijamy wyrazy wyższych rzędów, w granicy $\delta s \rightarrow 0$ otrzymujemy

$$\frac{\partial I_\nu}{\partial s} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} = \frac{h\nu}{4\pi} [N_U A_{UL} j + N_U B_{UL} I_\nu \psi - N_L B_{LU} I_\nu \phi] \quad (1.11)$$

Pochodna $\partial/\partial s$ jest pochodną kierunkową, co pozwala zapisać powyższe równanie w postaci

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) I_\nu + \frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} = \kappa(S - I_\nu) \quad (1.12)$$

gdzie wprowadzone nowe funkcje κ i S określone są wzorami

$$\kappa = \frac{h\nu}{4\pi} (N_L B_{LU} \phi - N_U B_{UL} \psi) \quad (1.13)$$

$$S = \frac{N_U A_{UL} j}{N_L B_{LU} \phi - N_U B_{UL} \psi} \quad (1.14)$$

Ostatnie trzy wzory definiują **równanie przepływu promieniowania** w ogólnej postaci. Wielkość S nosi tradycyjnie nazwę **funkcji źródłowej**, gdyż opisuje ona źródło fotonów, jakim jest proces emisji. Zauważmy, że S jest stosunkiem liczby emisji spontanicznych do liczby absorpcji, a emisja wymuszona nie jest dodawana do licznika, lecz występuje w mianowniku jako ujemna absorpcja. Wielkość κ nazywamy **współczynnikiem absorpcji**, w nim także znajdziemy odjętą emisję wymuszoną.

Równanie przepływu w postaci niezależnej od czasu będzie miało postać

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) I_\nu = \kappa(S - I_\nu) \quad (1.15)$$

a w przypadku atmosfery (warstwy) płasko-równoległej

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \kappa(S - I_\nu) \quad (1.16)$$

W większości astrofizycznych przypadków emisję wymuszoną możemy zaniedbać przy określaniu κ i otrzymamy prostszy wzór

$$\kappa = \kappa_0 N_L \phi(\nu) \quad (1.17)$$

Możemy teraz zdefiniować niezależną od częstości **głębokość optyczną** τ w formie całkowej

$$\tau(z) = -\kappa_0 \int_0^z N_L(z') dz' \quad (1.18)$$

lub różniczkowej

$$d\tau = -\kappa_0 N_L dz = -\frac{\kappa(z, \nu)}{\phi(\nu)} dz \quad (1.19)$$

Tak określona wielkość τ jest bardzo dogodna przy charakteryzowaniu gazu, przez który przepływa promieniowanie. Opisuje ona głębokość w gazie w zależności od liczby absorbujących atomów na drodze promieniowania zamiast od fizycznych rozmiarów samej drogi. Warstwa cienka i gęsta będzie miała podobną grubość optyczną, co warstwa rozległa i rozrzedzona. Równanie przepływu przekształca się do postaci

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau} = \phi(\nu)(I_\nu - S) \quad (1.20)$$

1.2.2 Przepływ promieniowania ogólniej

W taki sam sposób, jak dla atomu dwupoziomowego, równanie przepływu promieniowania można wyprowadzić w ogólnym przypadku, bez precyzowania mechanizmów prowadzących do absorpcji i emisji. Trzeba wcześniej zdefiniować odpowiednie zależności.

Współczynnik absorpcji

W przypadku atomu dwupoziomowego absorpcję określiliśmy na podstawie bilansu energetycznego i opisaliśmy przez współczynnik B_{LU} Einsteina. Możemy jednak określić ją zupełnie ogólnie, wprowadzając też odrębne oznaczenie. Definiujemy współczynnik χ_ν absorpcji (nieprzezroczystości) w taki sposób, że element materii o przekroju dA i długości ds pobiera z wiązki $d\omega$ prostopadłej do dA ilość energii równą

$$dE = \chi_\nu I_\nu dA ds d\omega d\nu dt \quad (1.21)$$

Wymiar współczynnika: $[\chi_\nu] = \text{cm}^{-1}$. W ośrodku statycznym χ_ν może być izotropowe, w ośrodku ruchomym występuje zależność od kąta spowodowana zależnością kątową efektu Dopplera. Warto rozróżniać absorpcję κ_ν i rozpraszanie σ_ν jako składowe całkowitej nieprzezroczystości

$$\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu \quad (1.22)$$

W skład absorpcji κ_ν mogą wchodzić przejścia

- Związano-związane, są to przejścia między poziomami energetycznymi atomu, bądź jonu, prowadzące do absorpcji w liniach widmowych, obecność wielu silnych linii może mieć dominujący wpływ na współczynnik κ .
- Związano-swobodne, to najczęściej wymieniany składnik absorpcji ciągłej, to przejścia, których rezultatem jest jonizacja atomu (jonu), czyli przejście elektronu ze stanu związanego o określonej energii do stanu swobodnego, charakteryzowanego przez całe kontinuum energii. Oczywiście istnieje energia (częstość) progowa, powyżej której jonizacja może mieć miejsce, odpowiada ona energii wiązania elektronu w danym atomie. Zazwyczaj przekrój czynny na fotojonizację jest największy dla częstości progowej, dla atomu wodoru ze wzrostem częstości maleje jak ν^{-3} , ale dla bardziej złożonych atomów przebieg jest bardziej złożony.
- Swobodno-swobodne, to przejścia między swobodnymi elektronami w plazmie. Nie należy ich mylić z rozpraszaniem, należy je rozpatrywać jako zmianę przez elektron jednej swobodnej orbity między jonami na inną swobodną orbitę o innej energii i prędkości.
- Dwuelektronowe, dotyczące bardziej skomplikowanych atomów, kiedy to w rezultacie absorpcji fotonu dochodzi do jednoczesnego wzbudzenia dwóch elektronów. Może być tak, że energia podwójnie wzbudzonego atomu jest większa od energii jonizacji jednego z elektronów. Ostatecznie atom ulegnie autojonizacji i/lub wyemituje foton (fotony). Nie jest to jednak rozpraszanie, bo wyemitowane zostaną fotony w zupełnie innym zakresie widma, a na danej częstości foton zostanie zniszczony (zaabsorbowany).

W skład rozpraszania σ_ν wchodzi procesy

- Związano-związane, czyli absorpcja w linii widmowej z następującą po niej emisją tego samego fotonu, może z nieznacznie zmienioną energią, ale w zupełnie innym kierunku.

- Rozpraszanie na swobodnym elektronie. Przy małych energiach mówimy o rozpraszaniu Thomsona, przy $h\nu \gg mc^2$ mamy rozpraszanie Comptona.
- Rozpraszanie na atomie, molekule, czyli tzw. rozpraszanie Rayleigha. Współczynnik tego rozpraszania silnie wzrasta w kierunku fal krótkich, jest to ten sam proces, który sprawia, że niebo jest niebieskie.

Najczęściej emisję wymuszoną dołącza się do χ_ν jako ujemną absorpcję, podobnie, jak w atomie dwupoziomowym.

Współczynnik emisji

Określa się go poprzez ilość energii dodanej do pola promieniowania z elementu objętości $dA ds$

$$dE = \eta_\nu dA ds d\omega d\nu dt \quad (1.23)$$

Na η_ν składają się: rozpraszanie η_ν^s i emisja termiczna η_ν^t .

Rozpraszanie

Wkład do emisji pochodzący od rozpraszania opisujemy tzw. funkcją redystrybucji $R(\nu', \omega'; \nu, \omega)$, tak zdefiniowaną, że wzór

$$R(\nu', \omega'; \nu, \omega) d\nu' d\nu \frac{d\omega'}{4\pi} \frac{d\omega}{4\pi} \quad (1.24)$$

określa prawdopodobieństwo tego, że foton (ν', ω') będzie rozproszony na (ν, ω) . Zatem jeśli przekrój czynny na rozpraszanie σ_ν przedstawimy w postaci $\sigma_\nu = \sigma_0 R(\nu', \omega'; \nu, \omega)$, to całkowita ilość promieniowania wyemitowanego w kąt $d\omega$ wyniesie

$$\eta^s d\nu \frac{d\omega}{4\pi} = \sigma_0 d\nu \frac{d\omega}{4\pi} \oint \frac{d\omega'}{4\pi} \int d\nu' R(\nu', \omega'; \nu, \omega) I_{\nu'} \quad (1.25)$$

Jeśli rozpraszanie jest spójne ($\nu' = \nu$) i izotropowe, to

$$\eta^s = \sigma_\nu J_\nu \quad (1.26)$$

Wielkość J_ν jest tzw. średnim natężeniem promieniowania, czyli natężeniem I_ν uśrednionym po pełnym kącie bryłowym. Z wielkością tą zapoznamy się bliżej w rozdziale 1.6.2 i następnych.

Emisja termiczna

Aby określić emisję termiczną, odwołamy się do rozważań termodynamicznych. Jeśli element materii jest w równowadze termodynamicznej z otoczeniem, to musi emitować tyle energii, ile zaabsorbował. Jest to tzw. **prawo Kirchhoffa**, można je zapisać:

$$\eta_{\nu}^t = \kappa_{\nu} I_{\nu} \quad (1.27)$$

Aby mówić o równowadze termodynamicznej, natężenie promieniowania musi być równe funkcji Plancka $I_{\nu} = B_{\nu}(T)$, a wówczas

$$\eta_{\nu}^* = \kappa_{\nu}^* B_{\nu}(T) \quad (1.28)$$

i jest to tzw. **prawo Kirchhoffa-Plancka** (górnny indeks * oznacza wartości wynikające z równowagi termodynamicznej, czyli wynikające z obsadzeń poziomów wyliczonych przy zastosowaniu równowagowego rozkładu Boltzmann w zadanej temperaturze T).

Gdy w równowadze termodynamicznej z otoczeniem znajduje się ciało doskonale czarne, to absorbuje ono wszystko ($\kappa_{\nu} = 1$), a emituje energię $\eta_{\nu} = B_{\nu}(T)$. Występuje tylko absorpcja, nie ma rozpraszania. Gdy element materii (fragmencik atmosfery gwiazdy) nie jest ciałem doskonale czarnym, to emituje on o tyle mniej, o ile mniej w porównaniu z ciałem doskonale czarnym zaabsorbował. Nasz element materii z atmosfery gwiazdowej może absorbować i rozpraszać i powinien być w równowadze z otoczeniem. To, co jest rozproszone – nie zmienia równowagowego pola promieniowania. To, co zaabsorbowane, musi być wyemitowane, aby pola promieniowania nie zmienić. Jeśli „nasz” element materii „wyjmiemy” z atmosfery gwiazdy, to pomimo, że nie będzie otoczony gorącą plazmą i polem promieniowania (nie będzie rozpraszał), oczekujemy, że będzie świecił emitując tyle samo promieniowania, co wcześniej. Możemy przyjąć, że jest to właśnie emisja termiczna elementu materii o danej temperaturze T i nieprzezroczystości κ_{ν} . Ponieważ emisja termiczna powinna być taka sama niezależnie od tego, w jakim polu promieniowania element materii jest zanurzony, więc w szczególnym przypadku powinna być taka, jak wynikająca z prawa Kirchhoffa-Plancka

$$\eta_{\nu}^t = \kappa_{\nu}^* B_{\nu}(T) \quad (1.29)$$

Przy małych gradientach temperatury możemy przyjąć, że jest to też emisja termiczna przy lokalnej wartości temperatury T . Promieniowanie termiczne stanie się „blackbody” dla ośrodka optycznie grubego, czyli dla $\kappa_{\nu}^* = 1$.

Równanie przepływu

Można teraz powtórzyć rozważania z bilansowaniem energii promieniowania wewnątrz cylindra z rysunku 1.3. Przy powyższych definicjach równanie przepływu promieniowania będzie miało postać

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\partial I_\nu}{\partial s} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad (1.30)$$

W przypadku stacjonarnym i jednowymiarowym

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu) \quad (1.31)$$

gdzie wprowadziliśmy **funkcję źródłową**

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \quad (1.32)$$

Rozdzielając współczynniki emisji η_ν i absorpcji χ_ν na omówione powyżej składowe, otrzymamy funkcję źródłową jako kombinację liniową średniego natężenia i funkcji Plancka

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu B_\nu(T) + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (1.33)$$

Podobnie, jak poprzednio, możemy wprowadzić **głębokość optyczną**

$$d\tau_\nu = \chi_\nu ds \quad (1.34)$$

W atmosferze płasko-równoległej pojawi się znak ujemny

$$d\tau_\nu = -\chi_\nu dz \quad (1.35)$$

bo τ_ν i z rosną w przeciwnych kierunkach, a równanie przepływu wygląda następująco

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial \tau} = I_\nu - S_\nu \quad (1.36)$$

Warto pamiętać rozróżnienie

- promieniowanie termiczne: $S_\nu = B_\nu(T)$
- ciało doskonale czarne: $I_\nu = B_\nu(T)$.

1.2.3 Rozwiązywanie w prostych przypadkach

Dla lepszego zrozumienia omawianych zależności rozpatrzmy wnioski wynikające z równania przepływu w kilku bardzo prostych przypadkach.

1. Nie ma materii: $\chi_\nu = 0 = \eta_\nu$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = 0, \quad I_\nu = \text{const} \quad (1.37)$$

Otrzymaliśmy znany już wcześniej wynik, że dla promieniowania rozchodzącego się w próżni natężenie I_ν nie zmienia się z odległością.

2. Występuje tylko emisja: $\chi_\nu = 0$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = \eta_\nu, \quad I_\nu(z) = I_\nu(z_0) + \frac{1}{\mu} \int_{z_0}^z \eta_\nu dz' \quad (1.38)$$

Przy przechodzeniu przez ośrodek emitujący natężenie początkowe jest powiększane o całkę ze współczynnika emisji.

3. Występuje tylko absorpcja: $\eta_\nu = 0$

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -\chi_\nu I_\nu, \quad I_\nu(z_2) = I_\nu(z_1) \exp \left(- \int_{z_1}^{z_2} \frac{1}{\mu} \chi_\nu dz \right) = I_\nu(z_1) e^{-\frac{\tau}{\mu}} \quad (1.39)$$

Przy przechodzeniu przez ośrodek absorbujący natężenie początkowe jest osłabiane wykładniczą funkcją grubości ośrodka τ .

1.2.4 Rozwiązanie formalne

Przy założeniu, że znamy funkcję źródłową, równanie przepływu promieniowania staje się równaniem różniczkowym pierwszego rzędu, którego rozwiązanie jest jednoznaczne przy zadaniu jednego warunku brzegowego dla każdego kąta $\mu \in [-1; 1]$ i częstości $\nu \in (0; \infty)$. W celu rozwiązania najpierw policzmy pochodną „pomocniczą”, inaczej mówiąc wprowadźmy czynnik całkujący

$$\frac{d}{d\tau} \left(I_\nu e^{-\frac{\tau}{\mu}} \right) = e^{-\frac{\tau}{\mu}} \left(\frac{dI_\nu}{d\tau} - \frac{1}{\mu} I_\nu \right) = -\frac{1}{\mu} e^{-\frac{\tau}{\mu}} S_\nu \quad (1.40)$$

W drugiej równości skorzystaliśmy z wprowadzonej przed chwilą postaci równania przepływu (1.36). Teraz już łatwo pokazać, że

$$I_\nu(\tau_2) = I_\nu(\tau_1) e^{-\frac{\tau_1 - \tau_2}{\mu}} - \frac{1}{\mu} \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\frac{t - \tau_2}{\mu}} S_\nu(t) dt \quad (1.41)$$

W przypadku atomu dwupoziomowego rozwiązanie ma postać

$$I_\nu(\tau_2) = I_\nu(\tau_1)e^{-(\tau_1-\tau_2)\frac{\phi(\nu)}{\mu}} - \int_{\tau_1}^{\tau_2} e^{-\frac{\phi(\nu)}{\mu}(t-\tau_2)} S(t) \frac{\phi(\nu)}{\mu} dt \quad (1.42)$$

W szczególnym przypadku tzw. warstwy półnieskończonej, kiedy $\tau_2 = 0$ (na powierzchni gwiazdy) i $\tau_1 = \infty$ (w środku gwiazdy), rozwiązanie $I_\nu(\tau, \mu)$ ma postać

$$I_\nu(0, \mu) = \int_0^\infty S(\tau) e^{-\frac{\phi}{\mu}\tau} \frac{\phi}{\mu} d\tau \quad (1.43)$$

Jest to tak zwane rozwiązanie formalne równania przepływu promieniowania. Nazywamy je tak dla odróżnienia od rozwiązania właściwego, bo założyliśmy, że znamy funkcję źródłową S , która tak naprawdę zależy od poszukiwanego natężenia I_ν . Przekonamy się o tym w dalszej części, w rozdziale 1.5.

1.3 Obliczanie obsadzeń poziomów

Chcemy rozwiązać równanie przepływu promieniowania względem I_ν . We wzorach na funkcję źródłową oraz na nieprzezroczystość występują jednak nieznanne (jak na razie) wartości obsadzeń poziomów N_L i N_U . Poszukiwane są zależności, z których można je wyznaczyć. Możliwości są dwie: albo rozwiązywać będziemy układy równań równowagi statystycznej, albo obsadzenia poziomów obliczymy na podstawie rozkładu Boltzmanna.

1.3.1 Równania równowagi statystycznej

Atom dwupoziomowy

Rozpatrzmy prosty przypadek atomu dwupoziomowego, dla którego musi zachodzić równość

$$N_L + N_U = N \quad (1.44)$$

o ile chcemy mieć stałą liczbę cząstek w atmosferze. Poszukujemy dwóch wielkości N_L i N_U , więc potrzebujemy drugiego równania. Znajdziemy je zakładając stan równowagi w rozpatrywanym gazie z przepływającym przezeń promieniowaniem. Wróćmy do umieszczonego w gazie cylindra. Przy depopulacji atom przechodzi ze stanu o wyższej energii do stanu o energii niższej, różnicę energii trzeba odprowadzić na zewnątrz. Może się to odbyć przez emisję kwantu światła lub przez przekazanie energii w procesie zderzenia ze swobodnym elektronem (zderzać się mogą różne cząstki, lecz w warunkach

atmosfer gwiazdowych zderzenia z elektronami są najistotniejsze). Podobnie wzbudzenia mogą zachodzić kosztem energii zaabsorbowanego fotonu lub zderzającego się z atomem swobodnego elektronu. Omówimy procesy prowadzące do depopulacji z poziomu U na L oraz wzbudzeń z L na U.

- Emisja spontaniczna prowadzi do ilości depopulacji w jednostce czasu, w jednostce objętości i w jednostce kąta bryłowego

$$\frac{1}{4\pi} N_U A_{UL} j(\nu, \vec{\omega}) \quad (1.45)$$

co po wycalkowaniu po wszystkich kierunkach (całka wyniesie 4π) i po wszystkich częstościach (całkujemy prawdopodobieństwo j , więc otrzymamy 1) daje wielkość

$$N_U A_{UL} \quad (1.46)$$

- Całkowita ilość emisji wymuszonych w jednostce czasu i w jednostce objętości, czyli wycalkowana po kierunkach i częstościach, wyniesie

$$\frac{N_U B_{UL}}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \psi(\nu, \vec{\omega}) \quad (1.47)$$

Tego całkowania nie możemy wykonać, gdyż pod całką znajduje się niewiadoma funkcja I_ν

- Depopulacje pochodzące od zderzeń ze swobodnymi elektronami zapiszmy w postaci

$$N_U C_{UL} \quad (1.48)$$

gdzie opisujący zderzenie współczynnik C_{UL} jest funkcją gęstości i temperatury swobodnych elektronów oraz zależy od rodzaju jonu i rozpatrywanych poziomów. Wartości C_{UL} wyznacza się eksperymentalnie lub oblicza metodami mechaniki kwantowej.

- Ilość absorpcji w jednostce czasu i objętości wygląda podobnie, jak ilość emisji wymuszonych

$$\frac{N_L B_{LU}}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \phi(\nu, \vec{\omega}) \quad (1.49)$$

- Ilość wzbudzeń zderzeniowych, podobnie, jak poprzednio

$$N_L C_{LU} \quad (1.50)$$

Zdefiniujmy tzw. **średnie natężenie promieniowania** dla absorpcji i dla emisji wymuszonej

$$\bar{J}_{\text{LU}} = \frac{1}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \phi(\nu, \vec{\omega}) \quad (1.51)$$

$$\bar{J}_{\text{UL}} = \frac{1}{4\pi} \oint d\omega \int_0^\infty d\nu I_\nu \psi(\nu, \vec{\omega}) \quad (1.52)$$

Pamiętajmy, że wprowadzenie średnich natężeń nie oznacza, że znamy te wartości; to tylko uproszczenie zapisu, by nie powtarzać w dalszych wzorach podwójnych całek. Jeśli bilans wzbudzeń i depopulacji ma być zerowy, a chcemy żeby był, bo opisujemy (na razie) atmosferę stacjonarną, to

$$N_{\text{L}}(B_{\text{LU}}\bar{J}_{\text{LU}} + C_{\text{LU}}) = N_{\text{U}}(A_{\text{UL}} + B_{\text{UL}}\bar{J}_{\text{UL}} + C_{\text{UL}}) \quad (1.53)$$

Jest to tzw. **równanie równowagi statystycznej**. Jest to drugie równanie dotyczące obsadzeń poziomów, pozwala ono wyznaczyć stosunek $N_{\text{U}}/N_{\text{L}}$.

Atom trójpoziomowy

Zapoznajmy się z nieco ogólniejszym przypadkiem atomu trójpoziomowego. Rozszerzenie analizy na atom wielopoziomowy stanie się później czymś oczywistym.

Poziomy oznaczamy teraz cyframi 1, 2, 3, jak zwykle 1 to poziom najniższy. Oznaczmy przez R_{ij} całkowite tempo, z jakim atom ze stanu i przechodzi w j . Na przykład

$$R_{12} = B_{12}\bar{J}_{12} + C_{12} \quad (1.54)$$

gdzie średnie natężenie dla przejścia 1–2 ma postać

$$\bar{J}_{12} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\nu \oint d\omega \phi_{12} I_\nu \quad (1.55)$$

Analogicznie określamy

$$R_{21} = A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21} \quad (1.56)$$

oraz $R_{13}, R_{31}, R_{23}, R_{32}$. Odpowiednie wielkości A_{ij} i B_{ij} (współczynniki Einsteina) zależą od konkretnego atomu, który rozpatrujemy, a tzw. reguły wyboru powodują często znikanie niektórych ze współczynników A_{ij} .

Równanie równowagi statystycznej dla poziomu 1, czyli bilans wzbudzeń (na poziomy 2 i 3) i depopulacji (z poziomów 2 i 3) będzie wyglądał następująco

$$\begin{aligned}
& N_1(B_{12}\bar{J}_{12} + C_{12} + B_{13}\bar{J}_{13} + C_{13}) = \\
& = N_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21}) + N_3(A_{31} + B_{31}\bar{J}_{31} + C_{31})
\end{aligned}$$

czyli

$$N_1(R_{12} + R_{13}) = N_2R_{21} + N_3R_{31} \quad (1.57)$$

Podobnie wygląda bilans dla poziomu 2

$$N_2(R_{21} + R_{23}) = N_1R_{12} + N_3R_{32} \quad (1.58)$$

Mamy łącznie trzy niewiadome: N_1, N_2, N_3 . Równanie równowagi statystycznej dla trzeciego poziomu jest tylko superpozycją dwóch równań poprzednich, zatem z dwóch równań możemy wyznaczyć tylko stosunki trzech niewiadomych. Ale wyznaczenie funkcji źródłowej dla przejścia 1–2 wymaga właśnie znajomości ułamka N_2/N_1 . Wyeliminujmy N_3 z powyższych równań, wówczas to, co zostanie, da się sprowadzić do postaci

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{R_{12} + R_{132}}{R_{21} + R_{231}} \quad (1.59)$$

gdzie wprowadziliśmy oznaczenia

$$R_{132} = \frac{R_{13}R_{32}}{R_{31} + R_{32}}, \quad R_{231} = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{31} + R_{32}} \quad (1.60)$$

Przyjrzyjmy się licznikowi bilansu N_2/N_1 w równaniu 1.59. R_{12} opisuje bezpośrednie wzbudzenia $1 \rightarrow 2$. Iloraz

$$\frac{R_{32}}{R_{31} + R_{32}}$$

jest prawdopodobieństwem, że jeśli elektron znajdzie się na poziomie 3, to po depopulacji przejdzie do stanu 2. Zatem R_{132} jest skomponowany z tempa wzbudzeń R_{13} oraz tempa depopulacji $3 \rightarrow 2$, czyli cały licznik po prawej stronie bilansu N_2/N_1 jest całkowitym tempem wzbudzeń (bezpośrednio i pośrednio) z poziomu 1 na 2. Analogicznie mianownik przedstawia procesy odwrotne – depopulacje z poziomu 2 na 1.

Otrzymaliśmy, podobnie jak dla atomu dwupoziomowego, równanie na stosunek N_2/N_1 , pozwalające na dalszą analizę.

Atom dwupoziomowy z kontinuum

Podobnie, jak trzeci poziom, możemy dodać do równań obecność tzw. poziomu kontinuum. Oznacza to nic innego, jak możliwość przejść jonizacyjnych i rekombinacyjnych (związano-swobodnych) w atomie (dotychczas dwupoziomowym). Przy oznaczeniu indeksem K współczynników przejść do i z poziomu kontinuum równanie równowagi statystycznej dla poziomu 1 ma postać

$$N_1(B_{12}\bar{J}_{21} + C_{12} + R_{1K} + C_{1K}) = N_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21}) + N_K(R_{K1} + C_{K1}) \quad (1.61)$$

Analogicznie wyprowadzamy dla poziomu 2

$$N_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21} + R_{2K} + C_{2K}) = N_1(B_{12}\bar{J}_{21} + C_{12}) + N_K(R_{K2} + C_{2K}) \quad (1.62)$$

Znowu trzecie równanie byłoby superpozycją dwóch powyższych równań, ale potrzebujemy tylko stosunku N_2/N_1 , który wyliczamy eliminując N_K .

1.3.2 Lokalna równowaga termodynamiczna (LTE)

Innym podejściem do problemu obsadzeń poziomów jest tzw. założenie LTE. Skrót pochodzi z języka angielskiego od „local thermodynamic equilibrium”.

Dla izolowanego, idealnie zamkniętego układu z gazem ustala się równowaga termodynamiczna. Z takiego układu nie wydostaje się żadna energia. Związane z nim pole promieniowania opisywane jest funkcją Plancka $B_\nu(T)$, gdzie T jest jedną temperaturą dla wszystkich cząstek w naszym układzie.

W atmosferze gwiazdy energia wydostaje się na zewnątrz w strumieniu cząstek i promieniowania, więc równowagi termodynamicznej nie można bezpośrednio zakładać. Ale możemy podzielić gwiazdę na infinitezymalnie małe komórki i w każdej takiej komórce możemy przybliżać stan gazu wartościami równowagowymi. Nazwa LTE – bo dokonujemy tego przybliżenia lokalnie. Równowagowy stan gazu opisywany jest tylko przez temperaturę T i całkowitą gęstość cząstek N . W modelu atmosfery wprowadzamy niezerowy gradient temperatury, który nie ma prawa istnieć w równowadze termodynamicznej.

Prawa opisujące LTE

- w atmosferach gwiazd materia zawsze zachowuje się jak gaz doskonały, którego ciśnienie opisywane jest wzorem

$$p_g = NkT = (N_{\text{atomy}} + N_{\text{jony}} + N_{\text{elektrony}})kT \quad (1.63)$$

- pole promieniowania opisywane jest funkcją Plancka

$$B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \quad (1.64)$$

W atmosferach gwiazd promieniowanie wpływa, ma naturę nielokalną, prowadzi to do odstępstw od LTE.

- Rozkład prędkości elektronów w warunkach równowagi termodynamicznej opisywany jest rozkładem Maxwella. Zderzenia niesprężyste i rekombinacje zaburzają ten rozkład, jednak w warunkach atmosfer gwiazd zderzenia sprężyste dominują, co usprawiedliwia jego stosowanie. Wzór na rozkład Maxwella można zapisać następująco

$$F_L(\vec{v}) = \frac{1}{v_0^3 \pi^{3/2}} \exp\left(-\frac{v_x^2}{v_0^2} - \frac{v_y^2}{v_0^2} - \frac{v_z^2}{v_0^2}\right) dv_x dv_y dv_z \quad (1.65)$$

gdzie v_x, v_y, v_z są składowymi wektora prędkości \vec{v} , a średnia prędkość ruchów termicznych wynosi

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (1.66)$$

- Równowaga wzbudzeniowa opisywana jest równaniem Boltzmanna

$$\frac{N_L^*}{N_U^*} = \frac{g_L}{g_U} e^{\frac{h\nu_0}{kT}} \quad (1.67)$$

W atmosferach gwiazd nie jest spełniona ze względu na znaczącą rolę przejść promienistych. Wprowadziliśmy wcześniej (wzór 1.28) górny indeks * dla oznaczania wartości obsadzeń poziomów wynikających z równowagowego rozkładu Boltzmanna. Taka konwencja jest ogólnie przyjęta w astrofizyce właśnie dla LTE.

- Równowaga jonizacyjna opisywana jest rozkładem Sahy

$$\frac{N^+ n_e}{N} = \frac{u^+}{u} \frac{2(2\pi m)^{3/2}}{h^3} (kT)^{3/2} e^{-(\chi_{\text{ion}}/kT)} \quad (1.68)$$

gdzie N jest całkowitą liczbą atomów, N^+ całkowitą liczbą jonów, obie wielkości wysumowane po wszystkich stanach wzbudzonych. Wielkości u i u^+ to tzw. funkcje partycji

$$u = g_1 + \sum_{n=2}^{\infty} g_n e^{-(\chi_n/kT)} \quad (1.69)$$

$$u^+ = g_1^+ + \sum_{n=2}^{\infty} g_n^+ e^{-(\chi_n^+/kT)} \quad (1.70)$$

W warunkach atmosfer gwiazdowych równanie Sahy jest na ogół złym przybliżeniem.

Założenie LTE jest bardzo często wykorzystywane do obliczania obsadzeń poziomów atomów i jonów w warunkach atmosfer gwiazdowych. Zastępuje ono rozwiązywanie układu równań równowagi statystycznej, które bywa dość kłopotliwe gdy uwzględniamy duże ilości poziomów. Trzeba jednak pamiętać, że jest to tylko przybliżenie, tym gorsze, im wyższe warstwy atmosfery opisuje.

W przeciwstawieniu do LTE obliczanie obsadzeń poziomów z równań równowagi statystycznej nazywa się zazwyczaj podejściem **non-LTE**.

1.4 Profile linii oraz pełna redystrybucja

Omawiając po kolei elementy równania przepływu promieniowania dochodzimy do problemu profili absorpcyjnych i emisyjnych. Zazwyczaj ten temat traktowany jest w podręcznikach bardzo skrótowo – podawane jest założenie, że funkcje profili są sobie równe: $\phi = \psi = j$, co upraszcza dalszą dyskusję atomu dwupoziomowego. Dla pełniejszego zrozumienia zagadnienia zapoznajmy się z fragmentem rozważań z podręcznika Cannona [3] wprowadzającym wzory na profile absorpcyjny i emisyjny oraz dyskutującym przypadek pełnej redystrybucji. Cannonowi dyskusja poniższa potrzebna była dla przejścia do szczegółów tzw. częściowej redystrybucji, ale sama w sobie warta jest lektury.

1.4.1 Profil absorpcyjny

Oddziaływanie pojedynczego atomu z jednym fotonem opisywane jest w ramach elektrodynamiki kwantowej. Już sam ten problem jest wystarczająco skomplikowany, by pisać o nim książki. Nie będzie on omawiany w niniejszej pracy, nasz problem jest zupełnie inny. W atmosferach gwiazd mamy do czynienia z gazem, czyli zespołem atomów, oraz polem promieniowania, czyli wiązką fotonów. W gazie o zadanej temperaturze każdy z atomów porusza się z jakąś prędkością, średnio tym większą im wyższa temperatura. Każdy foton z wiązki opisywanej natężeniem I_ν może oddziaływać z atomem poruszającym się z różną prędkością i w różnym kierunku. Efekt Dopplera powoduje, że atom w swoim układzie spoczynkowym „zobaczy” foton o innej częstotliwości. Z wiązki fotonów I_ν każdy foton może oddziaływać z gazem

inaczej, bo trafia na inaczej poruszający się atom. Profil absorpcyjny ϕ , dotyczący całej wiązki i zespołu atomów, powinien opisywać oddziaływanie średnie. Poszukujemy zatem funkcji ϕ takiej, że $N_L \phi(\nu, \vec{\omega})$ jest prawdopodobieństwem tego, że foton $(\nu, \vec{\omega})$ może zostać zaabsorbowany przez zespół N_L atomów w stanie energetycznym L.

Pamiętajmy, że atom dwupoziomowy może oddziaływać tylko z fotonami o energiach bliskich różnicy energii jego poziomów. Gdyby atom był w spoczynku, a poziomy nieskończenie wąskie, to jedynym fotonem, który mógłby oddziaływać, byłby ten o energii równej różnicy energii poziomów, oznaczmy ją $h\nu_0$, nazywamy ją zazwyczaj częstością środka linii.

Niech $q(\gamma)$ oznacza prawdopodobieństwo tego, że foton o częstości γ mierzonej w układzie spoczynkowym atomu, może zostać zaabsorbowany przez atom w stanie L. Niech \vec{v} oznacza prędkość atomu w układzie obserwatora, ν częstość fotonu w układzie obserwatora. Atom „widzi” foton o częstości γ przesuniętej dopplerowsko

$$\gamma = \frac{\nu \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\omega}}{c}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \approx \nu \left(1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{\omega}}{c}\right) \quad (1.71)$$

Wprowadźmy nową zmienną: $\Delta\nu = \nu - \nu_0$. Zachodzi oczywiście $\nu_0 = \gamma_0$. Mamy dalej

$$\Delta\gamma = \Delta\nu - \frac{\nu}{c} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \approx \Delta\nu - \frac{\nu_0}{c} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \quad (1.72)$$

Zatem prawdopodobieństwo tego, że atom o prędkości \vec{v} zaabsorbuje foton o częstości $\Delta\nu$ wynosi

$$q \left(\Delta\nu - \frac{\nu}{c} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \right) \quad (1.73)$$

Musimy teraz uwzględnić cały zespół atomów o różnych prędkościach \vec{v} . Posłużymy się tzw. funkcją dystrybucji $F_L(\vec{v})$, określoną w taki sposób, że

$$N_L F_L(\vec{v}) \delta\vec{v} \quad (1.74)$$

jest całkowitą liczbą atomów znajdujących się w stanie L, o prędkościach z przedziału $(\vec{v}, \vec{v} + \delta\vec{v})$. Prawdopodobieństwo absorpcji przez zespół atomów otrzymamy po wycałkowaniu po prędkościach

$$N_L \phi(\nu, \vec{\omega}) = \int_0^\infty d\vec{v} q \left(\Delta\nu - \frac{\nu}{c} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \right) N_L F_L(\vec{v}) \quad (1.75)$$

gdzie całkowanie obejmuje wszystkie wartości oraz kierunki. Wzór na sam profil będzie miał postać

$$\phi(\nu, \vec{\omega}) = \int_0^\infty d\vec{v} q \left(\Delta\nu - \frac{\nu}{c} \vec{v} \cdot \vec{\omega} \right) F_L(\vec{v}) \quad (1.76)$$

Postać explicite funkcji profilu ϕ otrzymamy podstawiając odpowiednie zależności q i F_L .

Z reguły za $F_L(\vec{v})$ przyjmujemy rozkład prędkości Maxwella, na przykład w formie podanej w rozdziale 1.3.2. Druga składowa profilu, czyli funkcja q , zależy od rodzaju atomu i przejścia promienistego. W wyidealizowanym przypadku nieskończenie wąskich poziomów energetycznych jako q podstawiamy funkcję Delta Diraca $q(\Delta\gamma) = \delta(\Delta\gamma)$. Niech $\vec{v} = v_x\vec{\omega}_x + v_y\vec{\omega}_y + v_z\vec{\omega}_z$, ograniczmy się do wybranego kierunku $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x$. Otrzymamy

$$\begin{aligned}\phi(\Delta\nu) &= \int_0^\infty \int \int dv_x dv_y dv_z \delta\left(\Delta\nu - \frac{\nu}{c}v_x\right) \frac{1}{v_0^3\pi^{3/2}} e^{-\frac{v_x^2}{v_0^2}} e^{-\frac{v_y^2}{v_0^2}} e^{-\frac{v_z^2}{v_0^2}} \\ &= \frac{1}{v_0\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-\frac{v_x^2}{v_0^2}} \delta\left(\Delta\nu - \frac{\nu}{c}v_x\right) dv_x \\ &= \frac{1}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}}\right)^2}\end{aligned}$$

gdzie

$$\Delta\nu_{\text{Dopp}} = \frac{\nu v_0}{c} \quad (1.77)$$

jest tzw. szerokością Dopplera, a v_0 jest średnią prędkością termiczną. Takie ϕ nazywamy profilem absorpcyjnym Dopplerowskim, ma on kształt krzywej Gaussa. Zapamiętajmy, że nawet przy nieskończenie wąskiej absorpcji pojedynczego atomu otrzymujemy całkiem szeroki profil absorpcyjny dla całego zespołu atomów. A to dzięki ruchom termicznym atomów.

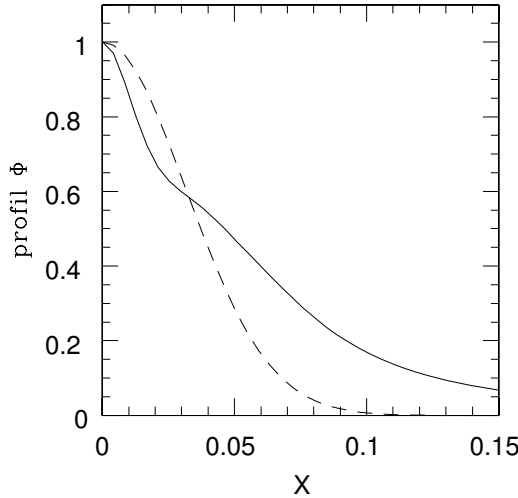
Bardziej realistyczny profil otrzymamy uwzględniając poszerzenie kwantowe poziomów i korzystając z zależności q dostarczonej przez mechanikę kwantową. Otrzymujemy wzór na tzw. profil Voigt'a

$$\phi(\Delta\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}\sqrt{\pi}} H(a, x) \quad (1.78)$$

gdzie

$$a = \frac{\sum_{i<u} A_{ui}}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}}, \quad x = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}}, \quad H(a, x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-y^2} dy}{(x-y)^2 + a^2} \quad (1.79)$$

Porównanie profili Dopplera i Voigta przedstawia rysunek 1.4. Jest to przykład dla jednej z linii wodorowych, zaczerpnięty z pracy Lemke [20]. Oba profile są unormowane do jedności. Zauważmy, że profil Voigta dla częstości w pobliżu środka linii ma kształt zbliżony do gaussowskiego, zaś



Rysunek 1.4: Porównanie kształtu profili Dopplera (linia przerywana) i Voigta (linia ciągła).

skrzydła linii są wyraźnie poszerzone. Za poszerzenie to niemal wyłącznie odpowiada liniowy efekt Starka.

Funkcję profilu Voigta możemy znaleźć w literaturze w postaci tabel oraz procedur interpolacyjnych dla różnych wartości parametrów plazmy. Funkcję tę wyznaczać można teoretycznie bądź doświadczalnie. Ale nawet dla najprostszego atomu, jakim jest wodór, występują w literaturze różnice w podanych wartościach.

Dla słabych, wąskich linii widmowych dominującym składnikiem profilu jest gaussowskie jądro. Dopiero dla najsilniejszych linii, kiedy jądro staje się wysyczone, zaczynają odgrywać rolę poszerzone skrzydła. Do takich silnych linii należą przede wszystkim linie wodorowe i dla dokładnej analizy ich kształtu należy stosować profil Voigta. Istnieją także opracowania wykazujące konieczność stosowania profilu Voigta dla analizy linii metali, jego nieuwzględnienie może prowadzić do błędów od 10 do 45% w wyznaczeniach szerokości równoważnych.

1.4.2 Profil emisyjny

Mechanika kwantowa wykazuje równość profili $j = \psi$. Wynika to choćby z faktu, że kwantowomechaniczne prawdopodobieństwo emisji fotonu jest proporcjonalne do $1 + N$ (zob. w książce W.Heitlera [14]), gdzie jedynka interpretowana jest jako wyraz reprezentujący emisję spontaniczną, a N jest

ilością fotonów już obecnych, czyli reprezentuje emisję wymuszoną. Zależność od kąta i częstości jest dla obu zjawisk taka sama. Zajmiemy się zatem tylko profilem j dla emisji spontanicznej. Przyjmijmy oznaczenia: γ oznacza częstości w układzie związanym z atomem, ν – z obserwatorem, zmienne ze znakiem prim ($'$) – częstości zaabsorbowane, bez prima – wyemitowane. Chcąc szczegółowo opisać proces emisji spontanicznej, w tym ilość zjawisk emisji, musimy prześledzić wcześniejszy los elektronu, zanim znalazł się on na górnym poziomie. Mógł się on tam znaleźć na dwa sposoby: wskutek absorpcji fotonu albo wzbudzenia zderzeniowego. Omówimy po kolei te dwa sposoby.

Emisja po absorpcji

Niech $p(\gamma', \gamma)$ oznacza prawdopodobieństwo na jednostkę częstości, że jeśli częstość zaabsorbowanego fotonu wyniosła γ' , to częstość fotonu wyemitowanego będzie równa γ . Przez $\frac{1}{4\pi}g(\vec{\omega}', \vec{\omega})$ oznaczmy odpowiednie prawdopodobieństwo dla kierunków. Zauważmy, że $p(\gamma', \gamma)$ wyklucza depopulację zderzeniową. Podobnie, jak w dyskusji profilu absorpcyjnego, uwzględniamy ruchy własne atomów \vec{v}_L i \vec{v}_U , powodujące dopplerowskie przesuwanie częstości. Przy absorpcji atom zyskuje pęd fotonu, więc $\vec{v}_L \neq \vec{v}_U$. Zaniedbujemy relatywistyczne zmiany kątów oraz efekty związane z polaryzacją fotonów. Wprowadźmy tzw. funkcję redystrybucji R_{LU}

$$\begin{aligned} R_{LU}(\gamma', \gamma) &= \frac{1}{4\pi}g(\vec{\omega}', \vec{\omega})q(\gamma')p(\gamma', \gamma) \\ &= \frac{g(\vec{\omega}', \vec{\omega})}{4\pi}q\left(\nu' - \frac{\nu'}{c}\vec{v}_L \cdot \vec{\omega}'\right)p\left(\nu' - \frac{\nu'}{c}\vec{v}_L \cdot \vec{\omega}', \nu - \frac{\nu}{c}\vec{v}_U \cdot \vec{\omega}\right) \\ &= R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U) \end{aligned}$$

Zatem

$$\frac{1}{4\pi}R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U)d\nu'd\omega'd\nu d\omega$$

jest prawdopodobieństwem, że pojedynczy atom zaabsorbował foton (ν', ω') z przedziału $(\nu', \nu' + d\nu')$, $(\omega', \omega' + d\omega')$ i spontanicznie wyemitował foton (ν, ω) w przedział $(\nu, \nu + d\nu)$, $(\omega, \omega + d\omega)$.

W dalszych obliczeniach trzeba uwzględnić wszystkie możliwe absorpcje, czyli wycalkować po ν' i $\vec{\omega}'$, wprowadzając jednocześnie funkcje dystrybucji F_U i F_L dla atomów. Zatem całkowita liczba $[\text{cm}^{-3}]$ absorpcji fotonów przez atomy w stanie (L, \vec{v}_L) , po których nastąpi spontaniczna emisja fotonu $(\nu, \vec{\omega})$ z atomu (U, \vec{v}_U) wyniesie

$$N_L B_{LU} \int d\omega' \int d\nu' I_{\nu'}(\omega') F_L(\vec{v}_L) F_U(\vec{v}_U) R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U) \quad (1.80)$$

Emisja po zderzeniu

Rozważmy wkład do j od wzbudzeń zderzeniowych. Tempo wzbudzeń zderzeniowych atomów (L, \vec{v}_L) z elektronami \vec{v}_e zwykle opisuje się przez

$$\sigma_{eL} f_L(\vec{v}_L) f_e(\vec{v}_e) \vec{v}_e$$

gdzie $f_L = N_L F_L$, a f_e jest odpowiednim rozkładem dla elektronów. To tempo trzeba pomnożyć przez profil emisyjny $q_c(\gamma)$ dla emisji spontanicznej po wzbudzeniu zderzeniowym. Na ogół zakłada się, że w wyniku zderzenia rozkład elektronów po podpoziomach poziomu wzbudzonego jest taki sam, jak po absorpcji, zatem profil ten jest taki sam, jak absorpcyjny: $q_c(\gamma) = q(\gamma)$. Aby uwzględnić wszystkie zderzenia z elektronami, trzeba wyciąkować po prędkościach elektronów. Zazwyczaj zakłada się, że \vec{v}_e jest niezależne od \vec{v}_U , co pozwala całkowanie po \vec{v}_e przeprowadzić osobno: $C_{LU} = \int d\vec{v}_e \sigma_{eL} f_e(\vec{v}_e) \vec{v}_e$. Całkowita liczba zderzeń, po których następuje emisja spontaniczna wyniesie

$$N_L C_{LU} F_L(\vec{v}_L) F_U(\vec{v}_U) q(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U) \quad (1.81)$$

Emisja łącznie

Oba wkłady do j trzeba dodać. Po długich, choć niezbyt trudnych obliczeniach, można rezultat sprowadzić do postaci podobnej, jak przy absorpcji

$$j(\nu, \vec{\omega}) = \int d\vec{v}_U F_U(\vec{v}_U) e(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U) \quad (1.82)$$

gdzie prawdopodobieństwo emisji e wynosi

$$e(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U) = \frac{B_{LU} \int d\nu' \int d\vec{\omega}' R_{LU}(\nu', \vec{\omega}'; \nu, \vec{\omega}; \vec{v}_L, \vec{v}_U) I_{\nu'}(\vec{\omega}') + C_{LU} q(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U)}{\frac{B_{LU}}{4\pi} \int d\nu' \int d\vec{\omega}' q(\nu', \vec{\omega}', \vec{v}_L) I_{\nu'}(\vec{\omega}') + C_{LU}} \quad (1.83)$$

Mianownik tego długiego ułamka pochodzi z narzucenia na j warunku normalizacji: funkcja j ma być prawdopodobieństwem, czyli wyciąkowana po wszystkich częstościach i kątach musi dawać 1. Zawarte w czynniku normującym obsadzenie N_L skraca się z tym występującym w liczniku, dzięki czemu z wzoru na e obsadzenie N_L znika, czego należało oczekiwać.

Kontynuowanie tej analizy wymaga znajomości funkcji dystrybucji prędkości F_U i wyrazu redystrybucyjnego R_{LU} . Funkcja R_{LU} zależy od związanych z atomem wielkości $q(\gamma')$ i $p(\gamma', \gamma)$ omawianych powyżej. Funkcja

$F_U(\vec{v}_U)$ może być wyznaczona z bilansu energetycznego w gazie, który z kolei zależy od pola promieniowania. Wszystko to powoduje wysoce nieliniową zależność prawdopodobieństw emisji j i ψ od natężenia promieniowania I_ν będącego faktycznie naszą wyznaczaną niewiadomą.

1.4.3 Pełna (całkowita) redystrybucja

Wyprowadziliśmy dotychczas następujące zależności

$$\phi(\nu', \vec{\omega}') = \int d\vec{v}_L F_L(\vec{v}_L) q(\nu', \vec{\omega}', \vec{v}_L) \quad (1.84)$$

$$j(\nu, \vec{\omega}) = \int d\vec{v}_U F_U(\vec{v}_U) e(\nu, \vec{\omega}, \vec{v}_U) \quad (1.85)$$

Dalszą analizę naszej atmosfery z atomem dwupoziomowym uprościło by znacznie założenie $\phi = j$. Kiedy tak mogło by być? Gdyby $F_L = F_U$, to warunkiem staje się $q = e$. Za funkcję dystrybucji prędkości możemy w przybliżeniu podstawić rozkład Maxwella, skąd otrzymamy $F_L = F_U$. Kiedy może zachodzić $q = e$? Właśnie dla odpowiedzi na to pytanie został przytoczony nieco wcześniej wzór 1.83 na funkcję e . Funkcja q występuje w nim w drugim składniku licznika, a także jest ukryta w pierwszym składniku w funkcji R_{LU} . Przyjrzenie się skomplikowanemu ułamkowi definiującemu e prowadzi do wniosku, że $q = e$ w następujących sytuacjach

1. jeśli we wzorze na e dominuje składnik zderzeniowy C_{LU} i składniki promieniste możemy w porównaniu z nim zaniedbać
2. gdyby $I_\nu(\vec{\omega}) = I$ (niezależne od kierunku i częstości), to wzór na e daje się przekształcić

$$e = \frac{B_{LU} I \int d\gamma' q(\gamma') p(\gamma', \gamma) + C_{LU} q(\gamma)}{B_{LU} I + C_{LU}} \quad (1.86)$$

W przekształceniach uwzględnić trzeba podaną nieco wcześniej definicję funkcji redystrybucji R_{LU} oraz pamiętać o całkowaniu rozkładów prawdopodobieństw. Mielibyśmy $q = e$ dla $\int d\gamma' q(\gamma') p(\gamma', \gamma) = q(\gamma)$, co zachodzi w dwóch przypadkach

$$p(\gamma', \gamma) = \delta(\gamma' - \gamma) \quad (1.87)$$

czyli dla funkcji delta Diraca,

3. albo gdy:

$$p(\gamma', \gamma) = q(\gamma) \quad (1.88)$$

Możliwość 1. to stan równowagi termodynamicznej, gdy głęboko w atmosferze dominują procesy zderzeniowe i to one decydują o obsadzeniu poziomów atomu. Punkt 2. to **pełna koherencja**, czyli częstości absorbowana i emitowana są sobie równe. Punkt 3. to tzw. **pełna redystrybucja**, gdy częstość emitowanego fotonu zupełnie nie zależy od częstości zaabsorbowanego wcześniej kwantu.

Możemy przyjmować, że poszerzony poziom energetyczny atomu składa się z wielu, tym razem już wąskich, podpoziomów. Pełna koherencja polegać będzie na tym, że emisja następuje z dokładnie tego samego podpoziomu, na którym znalazł się atom po absorpcji. Pełna redystrybucja z kolei polega na tym, że po absorpcji nastąpi rozdzielenie (redystrybucja) energii kwantu po wszystkich podpoziomach, a następująca emisja zostanie zrealizowana zgodnie z prawdopodobieństwem przejść z podpoziomów, zupełnie niezależnie od tego, który podpoziom został wcześniej obsadzony.

Skoro już przyjeśliśmy, że profile emisyjne j i ψ są sobie równe, to obecnie dochodzimy do sytuacji, w której wszystkie trzy wprowadzone profile są sobie równe. W podręcznikach nazwą „pełnej redystrybucji” określa się na ogół założenie, że $\phi(\Delta\nu) = \psi(\Delta\nu) = j(\Delta\nu)$. My już jednak wiemy, że literalnie termin ten odnosi się tylko do wspomnianej powyżej możliwości 3. Jak widać istnieją fizyczne uzasadnienia dla założenia pełnej redystrybucji, ale główny powód to matematyczne uproszczenia.

Przyjrzyjmy się wprowadzonym zależnościom przy założeniu pełnej redystrybucji

$$\kappa = \frac{h\nu}{4\pi} N_L B_{LU} \phi \left[1 - \frac{N_U B_{UL}}{N_L B_{LU}} \right] \quad (1.89)$$

$$S = \frac{N_U A_{UL}}{N_L B_{LU}} \left[1 - \frac{N_U B_{UL}}{N_L B_{LU}} \right]^{-1} \quad (1.90)$$

Otrzymaliśmy, że współczynnik absorpcji κ zależy tylko od profilu ϕ , a funkcja źródłowa S w ogóle nie zależy od częstości $\Delta\nu$. Średnie natężenia stają się sobie równe

$$\bar{J}_{UL} = \bar{J}_{LU} = \bar{J} \quad (1.91)$$

Równanie równowagi statystycznej atomu dwupoziomowego ma postać

$$N_L (B_{LU} \bar{J} + C_{LU}) = N_U (B_{UL} \bar{J} + A_{UL} + C_{UL}) \quad (1.92)$$

1.5 Funkcja źródłowa dla linii widmowych

Przyjrzyjmy się wzorom opisującym funkcję źródłową, dyskusję przeprowadzimy w kilku, znanych już, szczególnych przypadkach. Przyjmujemy pełną redystrybucję: $\phi = \psi = j$, $\bar{J}_{LU} = \bar{J}_{UL} = \bar{J}$.

1.5.1 Atom dwupoziomowy w pełnej redystrybucji

Przy założeniu pełnej redystrybucji funkcja źródłowa jest zależna od ilorazu N_U/N_L , którego wartość możemy wyznaczyć z równania równowagi statystycznej. Znane są zależności wiążące współczynniki Einsteina

$$A_{UL} = \frac{2h\nu_0^3}{c^2} B_{UL}, \quad g_L B_{LU} = g_U B_{UL} \quad (1.93)$$

które także podstawiamy do wzoru na S , ostatecznie otrzymamy

$$S = \frac{\bar{J} + \frac{2h\nu_0^3}{c^2} \frac{C_{LU} g_L}{A_{UL} g_U}}{1 + \frac{C_{UL}}{A_{UL}} \left(1 - \frac{C_{LU} g_L}{C_{UL} g_U}\right)} \quad (1.94)$$

By przedyskutować dokładniej funkcję S , potrzebujemy znajomości ilorazu C_{LU}/C_{UL} . Skorzystamy w tym celu z założenia **szczegółowej równowagi** procesów zderzeniowych, które mówi, że przejścia zderzeniowe bilansują się niezależnie od przejść promienistych. Skoro tak, to powinny one bilansować się także i w równowadze termodynamicznej, kiedy to obsadzenia poziomów są zgodne z równaniem Boltzmanna

$$\frac{N_L^*}{N_U^*} = \frac{g_L}{g_U} e^{\frac{h\nu_0}{kT}} \quad (1.95)$$

Dla przejść zderzeniowych zachodzi zatem

$$N_L^* C_{LU} = N_U^* C_{UL} \quad (1.96)$$

Podstawienie tak wyliczonego ilorazu C_{LU}/C_{UL} do wzoru na funkcję źródłową prowadzi do jej postaci

$$S = \frac{\bar{J} + \epsilon' B_\nu(T)}{1 + \epsilon'} = (1 - \epsilon) \bar{J} + \epsilon B_\nu(T) \quad (1.97)$$

gdzie $B_\nu(T)$ jest funkcją Plancka, oraz

$$\epsilon' = \frac{C_{UL}}{A_{UL}} \left(1 - e^{-\frac{h\nu_0}{kT}}\right), \quad \epsilon = \frac{\epsilon'}{1 + \epsilon'} \quad (1.98)$$

Przypomnijmy, że równanie przepływu promieniowania w postaci niezależnej od czasu ma postać

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) I = -\kappa I + \kappa S \quad (1.99)$$

Spróbujmy zrozumieć znaczenie jego poszczególnych wyrazów

- $-\kappa I$ jest energią promieniowania odebraną wiązce promieniowania przez absorpcję, κ jest współczynnikiem proporcjonalności, do którego została włączona emisja wymuszona jako ujemna absorpcja.
- κS jest energią dodaną do wiązki fotonów przez emisję spontaniczną. Skoro mamy ten sam współczynnik proporcjonalności, co powyżej, to S będzie natężeniem promieniowania spowodowanego wyłącznie emisją spontaniczną.

Przedyskutujmy składniki funkcji S

- \bar{J} jest średnim polem promieniowania, reprezentuje te procesy, w których atom pochłania foton i reemituje go. Jest to źródło fotonów
- $-\epsilon\bar{J}$ ujemny znak mówi o odpływie fotonów. Można pokazać, że

$$\epsilon = \frac{C_{UL}}{C_{UL} + A_{UL} + B_{UL}B_{\nu}(T)} \quad (1.100)$$

czyli jest stosunkiem depopulacji zderzeniowych do całkowitego tempa depopulacji. Więc ϵ jest prawdopodobieństwem na depopulację bez produkcji fotonu, czyli $-\epsilon\bar{J}$ odzwierciedla ilość fotonów pochłoniętych z pola promieniowania przez absorpcję z następującą po niej depopulacją zderzeniową. Zauważamy, że w mianowniku występuje wyraz $B_{UL}B_{\nu}(T)$, choć powinno tam być $B_{UL}\bar{J}$. Jest tak ze względu na przyjęte założenie równowagi termodynamicznej dla stosunku współczynników przejść zderzeniowych.

- $\epsilon B_{\nu}(T)$ jest źródłem fotonów przeciwnym odpływowi $-\epsilon\bar{J}$. Można również pokazać, że to samo ϵ ma postać

$$\epsilon = \frac{C_{LU}}{C_{LU} + B_{LU}B_{\nu}(T)} \quad (1.101)$$

czyli, że jest stosunkiem tempa wzbudzeń zderzeniowych do całkowitego tempa wszystkich wzbudzeń. Wzbudzenia zderzeniowe prowadzą do równowagowego promieniowania opisywanego funkcją Plancka. Ale nie wszystkie wzbudzenia w naszym atomie są zderzeniowe, więc tylko odpowiednia część funkcji Plancka dodaje się do naszej funkcji źródłowej.

1.5.2 Atom dwupoziomowy w LTE

Zastąpmy obsadzenia poziomów N_i ich wartościami równowagowymi N_i^* , a pole promieniowania przez $B_\nu(T)$. Równanie równowagi statystycznej przybiera postać

$$N_L^* (B_{LU} B_\nu(T) + C_{LU}) = N_U^* (B_{UL} B_\nu(T) + A_{UL} + C_{UL}) \quad (1.102)$$

W LTE obsadzenia poziomów wyznacza równanie Boltzmanna, które można przekształcić do postaci:

$$\frac{N_L^*}{N_U^*} = \frac{g_L}{g_U} e^{\frac{h\nu_0}{kT}} = \frac{B_{UL} B_\nu(T) + A_{UL}}{B_{LU} B_\nu(T)} \quad (1.103)$$

Podstawienie tego do równania równowagi statystycznej daje

$$N_L^* C_{LU} = N_U^* C_{UL} \quad (1.104)$$

z czego już korzystaliśmy przy obliczaniu funkcji źródłowej (równanie 1.96).

Te dwa ostatnie równania określają wspomnianą już wcześniej tzw. równowagę szczegółową, będącą szczególnym przypadkiem równowagi statystycznej. Równowaga taka może zachodzić np. głęboko w atmosferze, gdzie dominują przejścia zderzeniowe. Wówczas, jeśli zaniedbamy przejścia promieniste, jako nieistotne, to z bilansu równowagi statystycznej pozostanie

$$N_L C_{LU} = N_U C_{UL} \quad (1.105)$$

Dla małej reszty opisującej przejścia promieniste też musi zachodzić

$$N_L B_{LU} \bar{J} = N_U (B_{UL} \bar{J} + A_{UL}) \quad (1.106)$$

skąd przy znanych zależnościach łączących współczynniki Einsteina A i B otrzymujemy, że w równowadze szczegółowej średnie natężenie wynosi

$$\bar{J} = B_\nu(T) \quad (1.107)$$

Patrząc na funkcję źródłową w pełnej redystrybucji

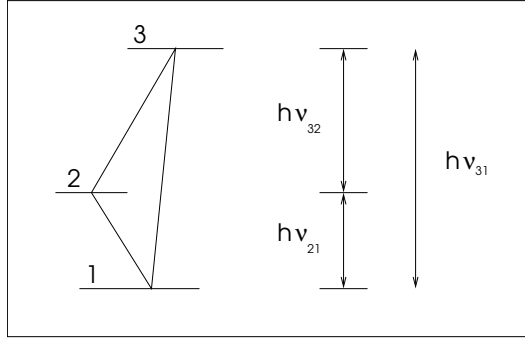
$$S = (1 - \epsilon) \bar{J} + \epsilon B_\nu(T) \quad (1.108)$$

widzimy, że warunkach LTE, kiedy zderzenia dominują, czyli kiedy $\epsilon \rightarrow 1$, zachodzi

$$S \rightarrow B_\nu(T) \quad (1.109)$$

dla dowolnego \bar{J} .

W atmosferach gwiazd gęstość maleje z wysokością, zatem C_{LU} i C_{UL} też maleją. Stałe pozostają współczynniki A i B . Zatem ϵ maleje z wysokością. Dla linii widmowych może zachodzić $\epsilon \sim 10^{-4}$ lub nawet $\sim 10^{-10}$, czyli linie widmowe powstają daleko od LTE.



Rysunek 1.5: Schemat atomu trójpoziomowego.

1.5.3 Atom trójpoziomowy

Dla ustalenia uwagi sporządzmy schemat poziomów energetycznych oraz przejść promienistych atomu trójpoziomowego – rysunek 1.5. Zajmijmy się wyznaczeniem natężenia I_{21} odpowiadającego przejściu 2–1. W sposób analogiczny, jak dla atomu dwupoziomowego można wyprowadzić równanie przepływu promieniowania

$$(\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla})I_{21} + \frac{1}{c} \frac{\partial I_{21}}{\partial t} = \kappa_{21}(S_{21} - I_{21}) \quad (1.110)$$

gdzie nieprzezroczystość κ i funkcja źródłowa S określone są wzorami

$$\kappa_{21} = \frac{h\nu_{21}}{4\pi} (N_1 B_{12} \phi_{12} - N_2 B_{21} \psi_{12}) \quad (1.111)$$

$$S_{21} = \frac{N_2 A_{21} j_{12}}{N_1 B_{12} \phi_{12} - N_2 B_{21} \psi_{12}} \quad (1.112)$$

Nadal zakładamy pełną redystrybucję, do wyznaczenia S potrzebujemy tylko stosunku obsadzeń poziomów N_2/N_1 . Podstawiając otrzymany wcześniej z równań równowagi statystycznej (1.59) stosunek obsadzeń poziomów do wzoru na funkcję źródłową można obliczyć

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \frac{g_1}{g_2} \frac{C_{12} + R_{132}}{B_{21}}}{1 + \frac{C_{21}}{A_{21}} \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{C_{12}}{C_{21}}\right) + \frac{R_{231}}{A_{21}} \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{R_{132}}{R_{231}}\right)} \quad (1.113)$$

Gdyby nie było poziomu 3, współczynniki R_{132} i R_{231} byłyby zerami i otrzymalibyśmy taki sam wzór, jak dla atomu dwupoziomowego. Możemy dalej zdefiniować

$$C_{12} = C_{12} + R_{132}, \quad C_{21} = C_{21} + R_{231} \quad (1.114)$$

czyli połączyć ze sobą współczynniki przejść zderzeniowych 1–2 ze współczynnikami przejść 1–2 za pośrednictwem poziomu 3. Wówczas po niewielkich przekształceniach otrzymamy

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \frac{g_1}{g_2} \frac{C_{12}}{B_{21}}}{1 + \frac{C_{21}}{A_{21}} \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{C_{12}}{C_{21}}\right)} \quad (1.115)$$

Postać tego równania jest taka sama, jak dla atomu dwupoziomowego. Dalej możemy założyć równowagę szczegółową dla przejść zderzeniowych oraz LTE, z czego skorzystamy eliminując w odpowiednich miejscach stosunek C_{12}/C_{21}

$$N_1^* C_{12} = N_2^* C_{21} \quad (1.116)$$

$$N_1^* C_{13} = N_3^* C_{31} \quad (1.117)$$

Definiujemy

$$\epsilon'_{21} = \frac{C_{21}}{A_{21}} \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{C_{12}}{C_{21}}\right) = \frac{C_{21}}{A_{21} + B_{21} B_{\nu_{21}}(T)} \quad (1.118)$$

$$\epsilon'_{231} = \frac{R_{231}}{A_{21}} \left(1 - \frac{g_1}{g_2} \frac{R_{132}}{R_{231}}\right) \quad (1.119)$$

$$[\epsilon B_\nu(T)]_{231} = \frac{g_1}{g_2} \frac{R_{132}}{B_{21}} \quad (1.120)$$

otrzymamy

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \epsilon'_{21} B_{\nu_{21}}(T) + [\epsilon B_\nu(T)]_{231}}{1 + \epsilon'_{21} + \epsilon'_{231}} \quad (1.121)$$

Przypomnijmy sobie wzór 1.97 na funkcję źródłową dla atomu dwupoziomowego, w którym mieliśmy źródło fotonów pochodzących ze wzbudzenia zderzeniowego $\epsilon B_\nu(T)$, oraz wyraz opisujący rozpraszanie $(1 - \epsilon)\bar{J}$. W atomie trójpoziomowym pierwszy wyraz został zastąpiony przez $\epsilon'_{21} B_{\nu_{21}}(T)$ ale oznacza dokładnie to samo. Z kolei składnik $[\epsilon B_\nu(T)]_{231}$ reprezentuje poprawkę do wyrazu $\epsilon' B_\nu(T)$, dodatkowe źródło wynikające z faktu, że elektron może znaleźć się na poziomie 2 (skąd może emitować foton) również dzięki zderzeniowej i promienistej depopulacji z poziomu 3. Podobnie ϵ'_{231} w mianowniku reprezentuje poprawkę do ϵ'_{21} , uwzględniającą przejścia $2 \rightarrow 1$ nie poprzez zderzenia, ale przez pośrednie (zderzeniowe i promieniste) procesy przy udziale poziomu 3.

Wzory na R_{132} i R_{231} łączą w sobie \bar{J}_{31} i \bar{J}_{32} . Obliczanie S_{21} wymaga równoległego obliczania S_{31} i S_{32} , czyli rozwiązywania równania przepływu względem I_{31} i I_{32} . To z kolei wymaga znajomości S_{21} . Potrzebny jest jakiś rodzaj iteracji.

1.5.4 Atom dwupoziomowy z kontinuum

Jeszcze pobieżnie przyjrzymy się atomowi dwupoziomowemu z dodatkowym poziomem kontinuum. Przypomnijmy równanie 1.61 równowagi statystycznej dla poziomu 1

$$N_1(B_{12}\bar{J}_{21} + C_{12} + R_{1K} + C_{1K}) = N_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21}) + N_K(R_{K1} + C_{K1}) \quad (1.122)$$

Przy założeniu LTE dla przejść jonizacyjnych, czyli $N_K = N_K^*$, można pokazać, że

$$N_K(R_{K1} + C_{K1}) = N_1^*(R_{K1} + C_{1K}) \quad (1.123)$$

Analogicznie otrzymujemy dla poziomu 2

$$N_2(A_{21} + B_{21}\bar{J}_{21} + C_{21} + R_{2K} + C_{2K}) = N_1(B_{12}\bar{J}_{21} + C_{12}) + N_2^*(R_{K2} + C_{2K}) \quad (1.124)$$

Podobnie, jak poprzednio (pomińmy długie, choć łatwe rachunki) funkcję źródłową można sprowadzić do postaci

$$S_{21} = \frac{\bar{J}_{21} + \epsilon B_{\nu 21}(T) + \eta B^*}{1 + \epsilon + \eta} \quad (1.125)$$

Interpretacja poszczególnych składników funkcji źródłowej jest podobna, jak w przypadku atomu trójpoziomowego

- \bar{J} – to część rozproszeniowa
- $\epsilon B_{\nu}(T)$ – to fotony wytworzone przez zderzenia C_{12}
- ηB^* – źródło pochodzące od elektronów zjonizowanych ze stanu 1, które rekombinują na poziom 2 i emitują foton
- ϵ – to fotony zniszczone przez zderzenia C_{21}
- η – przypadek jonizacji z poziomu 2 i następującej po niej rekombinacji na poziom 1

Jeśli $\epsilon > \eta$ i jednocześnie $\epsilon B_{\nu}(T) > \eta B^*$, wówczas mówimy o **linii zdominowanej zderzeniowo**. Jeśli $\epsilon < \eta$ oraz $\epsilon B_{\nu}(T) < \eta B^*$, to mówimy, że **linia jest zdominowana fotojonizacyjnie**. Linie zdominowane zderzeniowo są silnie powiązane z lokalną temperaturą elektronową, w przeciwieństwie do linii zdominowanych fotojonizacyjnie. Można w ten sposób wyjaśnić dlaczego linie H i K zjonizowanego wapnia Ca II wykazują emisję w obecności chromosfery (bo są zdominowane zderzeniowo), a jednocześnie linie Balmera nie wykazują (bo są zdominowane fotojonizacyjnie).

1.6 Inne charakterystyki pola promieniowania

Przy omawianiu natężenia promieniowania zwykle wprowadza się definicje gęstości energii promieniowania, strumienia oraz ciśnienia. Wszystko to w nawiązaniu do tzw. momentów pola promieniowania. W wielu podręcznikach zagadnienia te ograniczone są do przypadku atmosfery płasko-równoległej.

1.6.1 Funkcja dystrybucji fotonów

Funkcja dystrybucji fotonów f_R definiowana jest w ten sposób, że

$$f_R d\omega d\nu \quad (1.126)$$

oznacza ilość fotonów w jednostce objętości (1 cm^3), w miejscu (\vec{s}, t) , o częstościach z przedziału $(\nu, \nu + d\nu)$, w kącie bryłowym $d\omega$. Policzmy energię, którą fotony przeniosą przez powierzchnię dA w czasie dt . Kiedy przechodzi przez tę powierzchnię ostatni z rozpatrywanych fotonów, to pierwszy z nich jest już w odległości $c dt$. Fotony zajmują objętość $dA c dt$, więc przeniosły energię $h\nu dA c dt \cdot f_R d\omega d\nu$. Porównując tę energię z wzorem 1.2 definiującym I_ν otrzymamy zależność wiążącą natężenie promieniowania z funkcją dystrybucji

$$I_\nu = ch\nu f_R \quad (1.127)$$

1.6.2 Gęstość energii promieniowania

Określamy ją jako energię pola promieniowania zawartą w jednostce objętości (1 cm^3) w jednostkowym przedziale częstości (1 Hz), oznaczamy u_ν . Dla wiązki promieniowania ilość energii przechodzącej przez element powierzchni dA to

$$dE = I_\nu dA d\omega d\nu dt \quad (1.128)$$

Po czasie dt energia ta wypełni cylinder $dA c dt$. Z kolei energia zawarta w takim cylindrze, zgodnie z definicją gęstości u_ν , to

$$E' = u_\nu dA c dt d\nu \quad (1.129)$$

Jest to energia obejmująca promieniowanie wszystkich kierunków $\vec{\omega}$, więc

$$E' = \oint d\omega dE = dA d\nu dt \oint I_\nu d\omega \quad (1.130)$$

stąd wynika, że

$$u_\nu = \frac{1}{c} \oint I_\nu d\omega = \frac{4\pi}{c} J_\nu \quad (1.131)$$

gdzie wprowadziliśmy tzw. **średnie natężenie promieniowania**

$$J_\nu = \frac{1}{4\pi} \oint I_\nu d\omega \quad (1.132)$$

Jest to natężenie I_ν uśrednione po wszystkich kierunkach, które w atmosferze (warstwie) płasko-równoległej ma postać

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \quad (1.133)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że J_ν jest innym średnim natężeniem, niż zdefiniowane wcześniej (wzór 1.51) dla przejść w liniach widmowych średnie \bar{J} .

1.6.3 Strumień

Strumień określamy jako ilość energii przechodzącej przez element powierzchniowy dA w czasie dt , a oznaczamy przez F_ν . Zauważmy, że powyższe określenie pomija zależność od kąta bryłowego $d\omega$. Ponieważ chcemy wiedzieć, w którą stronę przepływa energia, strumień powinien być wielkością wektorową \vec{F}_ν taką, że dla zorientowanego elementu powierzchniowego $d\vec{A}$

$$\vec{F}_\nu \cdot d\vec{A} \quad (1.134)$$

określa przepływ promieniowania przez $d\vec{A}$. Definiujemy zatem

$$\vec{F}_\nu = \oint d\omega I_\nu \cdot \vec{\omega} \quad (1.135)$$

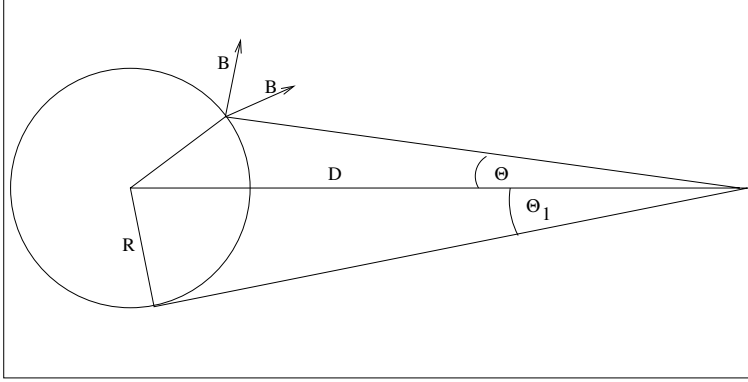
Obrazowo wygląda to mniej więcej tak, że dla każdego kierunku $\vec{\omega}$ rozchodzenia się promieniowania konstruujemy wektor o długości odpowiadającej wartości natężenia I_ν dla tego kierunku, a następnie z tych wektorów tworzymy jeden wypadkowy odpowiadający strumieniowi. W polu izotropowym taki wektor wypadkowy musi znikać: $F_\nu = 0$.

W atmosferze płasko-równoległej całkowanie wykonujemy, jak poprzednio, a iloczyn skalarny $I_\nu \cdot \vec{\omega} = \mu I_\nu$ to składowa „z” natężenia. Otrzymujemy tym razem wielkość skalarną

$$F_\nu(z) = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu \quad (1.136)$$

W odległości r od izotropowego źródła punktowego strumień zachowuje się jak

$$F = \frac{\text{const}}{r^2} \quad (1.137)$$



Rysunek 1.6: Strumień w odległości D od sfery o promieniu R i jednorodnej jasności B .

Możemy się o tym przekonać wyobrażając sobie punktowe źródło otoczone dwiema sferami o promieniach r_1 i r_2 . Energia E przepływająca przez obie powierzchnie ma tę samą wartość

$$4\pi r_1^2 F_1 = E = 4\pi r_2^2 F_2 \quad (1.138)$$

czyli $r^2 F = \text{const}$. Czy można to pogodzić z wykazaną wcześniej stałością I_ν ? Przekonajmy się o tym obliczając strumień w odległości D od środka sfery o promieniu R i o jednorodnej jasności powierzchniowej $I_\nu(\mu) = B$ (zob. rysunek 1.6). Ze względu na symetrię osiową wystarczy rozpatrywać przypadek jednowymiarowy. Zgodnie z definicją strumień w danym punkcie, to

$$F_\nu(D) = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu \quad (1.139)$$

Skoro natężenie I_ν nie zależy od odległości, możemy zastąpić je natężeniem B z powierzchni sfery, które nie zależy od kąta (wystawiamy B przed całkę) i dochodzi nie z pełnego kąta bryłowego, lecz z tarczy gwiazdy o promieniu kątowym Θ_1 ($\mu_1 = \cos \Theta_1$)

$$F_\nu(D) = 2\pi B \int_{\mu_1}^1 \mu d\mu \quad (1.140)$$

Dalej łatwo obliczamy

$$F_\nu(D) = 2\pi B \left[\frac{1}{2} \mu^2 \right]_{\mu_1}^1 = \pi B (1 - \mu_1^2) = \pi B \sin^2(\Theta_1) \quad (1.141)$$

czyli

$$F_\nu(D) = \pi B \frac{R^2}{D^2} \quad (1.142)$$

Na powierzchni gwiazdy strumień byłby $F(R) = \pi B$ a z odległością D malałby jak $1/D^2$

Nietrudno jest wykazać, że dla sfery o niejednorodnej jasności $I_\nu(\mu)$ zależnej od kąta μ zachodzi

$$F_\nu(D) = \frac{R^2}{D^2} F_\nu(R) \quad (1.143)$$

Podsumowując: odległe źródła światła są słabsze od bliskich, to wiadomo, ale wielkością, która maleje z kwadratem odległości jest strumień, a nie natężenie promieniowania. Wynika to z przyjętych definicji i sprzeczności tu nie ma. Ponadto warto pamiętać, że

- jeśli możemy rozdzielić kąty (np. dla tarczy Słonecznej), to obserwujemy $I_\nu(\mu)$ dla różnych kątów μ
- jeśli kątów rozdzielić nie możemy, to mierzymy tylko

$$F_\nu(D) = \frac{R^2}{D^2} F_\nu(R)$$

1.6.4 Ciśnienie promieniowania

Ciśnienie jest to siła działająca na 1 cm^2 (jednostkę powierzchni), a siła to pęd przekazywany w jednostce czasu (dp/dt). Dla fotonu $p_\nu = h\nu/c = E_\nu/c$, czyli wkład do pędu pochodzący od danego promienia $\vec{\omega}$, to

$$dp_\nu = \frac{dE_\nu}{c} \quad (1.144)$$

Ponieważ element powierzchniowy dA jest nachylony do promienia $\vec{\omega}$, więc ilość energii przepływającej będzie zredukowana o czynnik μ względem ustawienia prostopadłego

$$dE_\nu = I_\nu(\vec{\omega}) d\omega \mu \quad (1.145)$$

Ponieważ do ciśnienia działającego na dA wlicza się tylko składową pędu prostopadłą do dA , więc dojdzie następna redukcja o czynnik μ i ostatecznie

$$dP_\nu = \frac{1}{c} I_\nu \mu^2 d\omega \quad (1.146)$$

$$P_\nu = \frac{1}{c} \oint I_\nu \mu^2 d\omega \quad (1.147)$$

1.6.5 Momenty Eddingtona

W poprzednich rozdziałach zobaczyliśmy, że gęstość energii promieniowania, strumień oraz ciśnienie, opisywane są przez całki z natężenia promieniowania mnożonego przez kolejne potęgi zmiennej kątowej μ (zerową, 1 i 2). Są to tzw. momenty promieniowania. Ich prostszą postać, dotyczącą atmosfery płasko-równoległej, wprowadził Eddington [8]

$$J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu d\mu \quad (1.148)$$

$$H_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu d\mu \quad (1.149)$$

$$K_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu \mu^2 d\mu \quad (1.150)$$

Zdefiniujmy jeszcze w tym miejscu tzw. zmienny czynnik Eddingtona

$$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu} \quad (1.151)$$

Rozdział 2

Dyskusja jakościowa widma liniowego

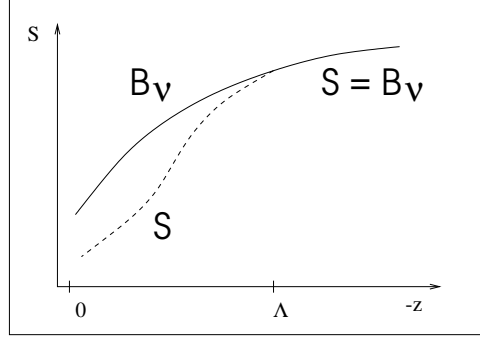
Wprowadzając szereg uproszczeń, postaramy się zrozumieć zachowanie się rozwiązania równania przepływu promieniowania w linii widmowej. Dyskusję przeprowadzimy dla atomu dwupoziomowego, wspomnimy także o konsekwencjach wprowadzenia dodatkowych poziomów. Rozważania poniższe oparte są na fragmentach z podręcznika Cannona [3]. Wspomniany już wcześniej podręcznik jest stosunkowo mało znany, wprowadza do analizy linii widmowych dość skomplikowany formalizm matematyczny, ale niektóre w nim zawarte wyjaśnienia i przykłady warto poznać.

2.1 Przebieg funkcji źródłowej w atmosferze

Dla małej komórki, głęboko w atmosferze, możemy przyjąć, że efektywnie zero promieniowania przechodzi przez jej powierzchnię. Oznacza to, że tyle samo promieniowania wpada do komórki, co ją opuszcza. Mówimy o równowadze promienistej, stosujemy przybliżenie LTE, z którego wynika $S = B_\nu(T)$. Bliżej powierzchni gwiazdy fotony mogą przez tę powierzchnię uciekać. Narusza to równowagę i spodziewamy się, że funkcja źródłowa będzie różniła się od funkcji Plancka. Oszacujmy, w którą stronę.

Każda ucieczka fotonu sprawia, że w atmosferze ubywa o jeden spośród fotonów, które mogłyby zostać zaabsorbowane. Absorpcja, to proces, który pozostawia atom w stanie U. Zatem wzrost liczby fotonów, które uciekły, powoduje spadek N_U . Jeśli mamy zachowaną masę, czyli

$$N_L + N_U = N = \text{const} = N_U^* + N_L^* \quad (2.1)$$



Rysunek 2.1: Różnica między funkcją Plancka a funkcją źródłową. Na głębokościach w atmosferze większych niż Λ , funkcja źródłowa S równa jest funkcji Plancka, na głębokościach mniejszych wartość S maleje poniżej $B_\nu(T)$.

wtedy zmniejszenie N_U pociąga za sobą wzrost N_L . Ale wartości równowagowe N_L^* i N_U^* pozostają niezmienione, bo w LTE fotony nie uciekają. Zatem

$$\frac{N_U}{N_L} < \frac{N_U^*}{N_L^*} \quad (2.2)$$

Niech

$$\frac{N_U}{N_L} = \gamma \frac{N_U^*}{N_L^*} = \gamma \frac{g_U}{g_L} e^{-\frac{h\nu_0}{kT}} \quad (2.3)$$

gdzie $\gamma < 1$. Wychodząc z postaci funkcji źródłowej przedstawionej wzorem (1.94) można dalej pokazać, że

$$S = \frac{\gamma B_\nu(T)}{1 + \frac{1-\gamma}{e^{\frac{h\nu_0}{kT}} - 1}} \quad (2.4)$$

Ponieważ $h\nu_0/kT > 0$, więc $e^{\frac{h\nu_0}{kT}} > 1$, zatem

$$S < B_\nu(T) \quad (2.5)$$

Dowiedzieliśmy się zatem, że ucieczka fotonów powoduje zmniejszenie funkcji źródłowej poniżej jej wartości równowagowej. Im bliżej powierzchni, tym więcej fotonów ucieka, tym bardziej S różni się od funkcji Plancka. Jakościowo przedstawia to rysunek 2.1. Przykład ten pokazuje, że nie tylko stan atomów wpływa na pole promieniowania, ale i pole promieniowania, jego ucieczka z atmosfery gwiazdowej, wywiera wpływ na stan atomów. Mówimy o oddziaływaniu materii i promieniowania.

2.2 Droga termalizacji fotonu

Oszacujmy głębokość Λ , przy której funkcja źródłowa zaczyna odchyłać się od funkcji Plancka.

Raz wytworzony wzbudzeniem zderzeniowym foton (składnik $\epsilon B_\nu(T)$ funkcji źródłowej) dozna szeregu następujących po sobie absorpcji i emisji (składnik \bar{J}) zanim dojdzie do depopulacji zderzeniowej (składnik $-\epsilon \bar{J}$) niszczącej foton. Oznaczmy przez Ξ odległość między wytworzeniem a zniszczeniem fotonu. Następujące po sobie absorpcje i emisje to oczywiście rozpraszanie, które nie niszczy fotonu. Wielkość Ξ nazywamy długością drogi termalizacji fotonu. Nazwa pochodzi od procesów biorących udział w tworzeniu i destrukcji fotonu: foton powstaje kosztem energii termicznej i po przebyciu drogi Ξ znika, a jego energia powiększa energię termiczną gazu. Wartość liczbową Ξ zależy od wartości parametru ϵ i zwykle przewyższa o rzędy wielkości długość średniej drogi swobodnej między kolejnymi rozproszczeniami.

Jeśli rozważymy taki punkt w atmosferze, który leży głębiej niż Ξ pod powierzchnią, to każdemu fotonowi utworzonemu w nim, a zniszczonemu w odległości Ξ , odpowiada zniszczenie innego fotonu wytworzonego w jakimś innym miejscu, średnio o wielkość Ξ dalej. W danym punkcie atmosfery będzie miała miejsce równowaga między kreacją a destrukcją fotonów. Wyraz źródłowy $\epsilon B_\nu(T)$ będzie dokładnie równoważony przez wyraz odpływowy $-\epsilon \bar{J}$. Prowadzi to do LTE, ale zauważmy, że mamy do czynienia z efektami nielokalnymi, gdyż foton utworzony w jednym miejscu jest absorbowany w innym.

Jeśli zaś rozważany punkt leży w zasięgu Ξ od powierzchni, wówczas emitowany zeń foton może po pewnej liczbie rozproszeń osiągnąć powierzchnię gwiazdy i uciec zanim zostanie zniszczony. Zabraknie zatem fotonu, który miałby być zaabsorbowany w sąsiedztwie. Równowaga między kreacją a destrukcją będzie naruszona. Odbywa się to wszystko kosztem energii wewnętrznej atomów, czyli N_U maleje. Jednocześnie musi wzrastać N_L , czyli zachodzi $S < B_\nu(T)$. Zatem głębokość Λ , przy której S zaczyna różnić się od $B_\nu(T)$ musi być porównywalna z długością drogi termalizacji Ξ fotonu.

2.3 Natężenie na powierzchni atmosfery

Zakładamy w dalszym ciągu atom dwupoziomowy, pełną redystrybucję, stan równowagi statystycznej bez wpływu masy. Profil $\phi(\Delta\nu)$ występuje

tylko we wzorze na nieprzezroczystość κ . Pamiętajmy, że

$$\frac{N_U}{N_L} < \frac{N_U^*}{N_L^*} \quad (2.6)$$

stąd

$$\frac{N_U B_{UL}}{N_L B_{LU}} \leq e^{-\frac{h\nu}{kT}} \ll 1 \quad (2.7)$$

Ta ostatnia nierówność spełniona jest w większości przypadków astrofizycznych, więc emisję wymuszoną (traktowaną jak ujemną absorpcję) możemy zaniedbać przy określaniu κ

$$\kappa = \kappa_0 N_L \phi(\Delta\nu) \quad (2.8)$$

Przypomnijmy rozwiązanie formalne (wzór 1.43) dla warstwy półnieskończonej

$$I_\nu(0) = \int_0^\infty e^{-\frac{\phi}{\mu}\tau} S(\tau) \frac{\phi}{\mu} d\tau \quad (2.9)$$

Profil $\phi(\Delta\nu)$ zależy od głębokości przez zależność od temperatury, co komplikuje analizę. Zakładamy więc, że $\phi(\Delta\nu)$ nie zależy od głębokości w atmosferze, pamiętając, że jest to нефизyczne. Dla potrzeb niniejszej analizy zdefiniujemy zależną od częstości głębokość optyczną η

$$\eta(\tau, \Delta\nu) = \phi(\Delta\nu)\tau \quad (2.10)$$

$$d\eta(\tau, \Delta\nu) = \phi(\Delta\nu)d\tau \quad (2.11)$$

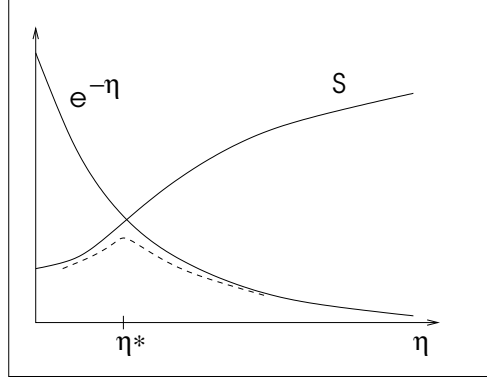
Stąd natężenie I_ν na powierzchni atmosfery można zapisać

$$I_\nu(0, \Delta\nu, \mu) = \int_0^\infty S\left(\frac{\eta}{\phi(\Delta\nu)}\right) e^{-\frac{\eta}{\mu}} \frac{d\eta}{\mu} \quad (2.12)$$

Rozpatrzmy przypadek, kiedy promieniowanie opuszcza atmosferę gwiazdy prostopadle do jej powierzchni. Podstawienie $\mu = 1$ uprości wzory i ułatwi analizę. Natężenie promieniowania opisywane jest teraz zależnością

$$I_\nu(0, \Delta\nu, 1) = \int_0^\infty S\left(\frac{\eta}{\phi(\Delta\nu)}\right) e^{-\eta} d\eta \quad (2.13)$$

Widzimy, że jest to całkowanie (sumowanie) funkcji S ważone czynnikiem $e^{-\eta}$. Rysunek 2.2 ilustruje sytuację. Iloczyn $Se^{-\eta}$ osiąga maksimum przy



Rysunek 2.2: Graficzne przedstawienie iloczynu dwóch funkcji: rosnącej w głąb atmosfery funkcji źródłowej S oraz szybko malejącej funkcji $e^{-\eta}$. Iloczyn, pokazany linią przerywaną, ma maksimum w punkcie η^* .

pewnej wartości $\eta = \eta^*$. Kształt przebiegu tego iloczynu, pokazany na rysunku 2.2, wynika z faktu, że funkcja źródłowa S maleje na zewnątrz atmosfery dla $\eta < 1$, a szybko malejący czynnik $e^{-\eta}$ gwałtownie odcina wkład do I_ν pochodzący od S przy $\eta > 1$. Zatem musi być:

$$\eta^* \approx 1 \quad (2.14)$$

Oczywiste jest, że główny wkład do całki, czyli do $I_\nu(0, \Delta\nu, 1)$ pochodzi z głębokości w sąsiedztwie η^* . Prowadzi to do wniosku, że samą całkę możemy przybliżać przez wartość funkcji S w punkcie maksimum η^*

$$I_\nu(0, \Delta\nu, 1) \approx S\left(\frac{\eta^*}{\phi(\Delta\nu)}\right) \quad (2.15)$$

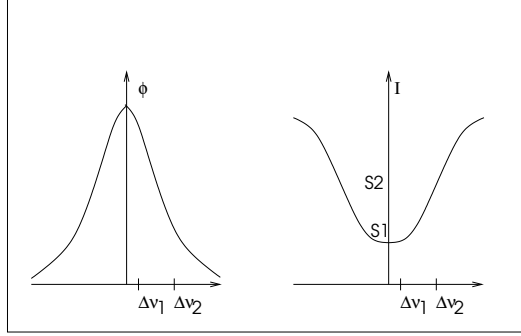
Dla wielkości η^* można obliczyć odpowiadającą jej głębokość optyczną τ^* i głębokość fizyczną z^*

$$\tau^* = \frac{\eta^*}{\phi(\Delta\nu)}, \quad z^* = \frac{-\eta^*}{\kappa_0 N_L \phi(\Delta\nu)} \quad (2.16)$$

przy czym trzeba było założyć, że N_L nie zależy od głębokości. Większość promieniowania, jak już stwierdziliśmy, pochodzi z głębokości $\eta^* \approx 1$, a odpowiadająca jej fizyczna głębokość z^* zależy od częstości

$$z^* \approx \frac{1}{\kappa_0 N_L \phi(\Delta\nu)} \quad (2.17)$$

Ponieważ $\phi(\Delta\nu)$ maleje przy wzroście $|\Delta\nu|$, więc odpowiednie z^* wzrasta.



Rysunek 2.3: Powstawanie profilu absorpcyjnego.

Dla ilustracji powstawania profilu linii widmowej na powierzchni atmosfery (zobacz rysunek 2.3) wybierzmy dwie częstotliwości $\Delta\nu_1$ i $\Delta\nu_2$ takie, że

$$|\Delta\nu_1| < |\Delta\nu_2| \quad (2.18)$$

czyli

$$\phi(\Delta\nu_1) > \phi(\Delta\nu_2) \quad \text{i} \quad z_1^* < z_2^* \quad (2.19)$$

Funkcja źródłowa S rośnie ze wzrostem fizycznej głębokości w atmosferze gwiazdy, zatem

$$S(z_1^*) < S(z_2^*) \quad (2.20)$$

a stąd

$$I_\nu(0, \Delta\nu_1, 1) \approx S(z_1^*) < S(z_2^*) \approx I_\nu(0, \Delta\nu_2, 1) \quad (2.21)$$

Oczywiście skoro $\phi(\Delta\nu)$ jest symetryczne względem środka linii $\Delta\nu = 0$, to i natężenie I_ν jest symetryczne. W końcowym rezultacie powstaje profil absorpcyjny linii widmowej.

Otrzymaliśmy dla promieniowania w linii widmowej, że przebieg natężenia na powierzchni w funkcji częstotliwości (profil linii) jest odzwierciedleniem przebiegu funkcji źródłowej w funkcji głębokości w atmosferze. Transformata między funkcjami $S(z^*)$ a $I_\nu(\Delta\nu)$ nie jest jednak prosta, jest zależna od nieliniowej funkcji $\phi(\Delta\nu)$ profilu absorpcyjnego. Trzeba także pamiętać, że natężenie I_ν w skrzydłach profilu nie będzie bez przeszkód rosło dla coraz większych $\Delta\nu$, gdyż w pewnym miejscu nieprzezroczystość w linii stanie się mniejsza od nieprzezroczystości w kontinuum, co oznacza, że obserwować będziemy promieniowanie z głębokości formowania kontinuum, już nie głębiej.

Pomięty przypadek $\mu < 1$ to taki, kiedy obserwujemy promieniowanie opuszczające atmosferę odchylone o kąt θ w stosunku do kierunku pionowego. W atmosferze płaskorównoległej, o stałej gęstości i temperaturze, mamy tak jak poprzednio sytuację, że z powierzchni uciekają fotony po przebyciu drogi krótszej od drogi termalizacji Ξ . Tym razem jednak odcinek Ξ ustawiony jest pod kątem θ do pionu. Główny wkład do natężenia I_ν dają teraz obszary płytsze $z^* = -\Xi \cos \theta$. Ponieważ funkcja źródłowa maleje z wysokością, więc odpowiednie natężenie maleje ze wzrostem θ . Mówimy o pociemnieniu brzegowym.

Takie same wnioski dotyczące profili linii widmowych możemy otrzymać dzięki prostemu przykładowi rachunkowemu. Rozpatrzmy rosnącą liniowo z głębokością atmosfery funkcję źródłową $S(\tau) = a + b\tau$, przy $a, b > 0$. Jeśli $\phi(\Delta\nu)$ nie zależy od głębokości, to można wykonać odpowiednie całkowanie i otrzymać

$$I_\nu(0, \Delta\nu, \mu) = a + b \frac{\mu}{\phi(\Delta\nu)} \quad (2.22)$$

a stąd możemy otrzymać znane nam już zależności

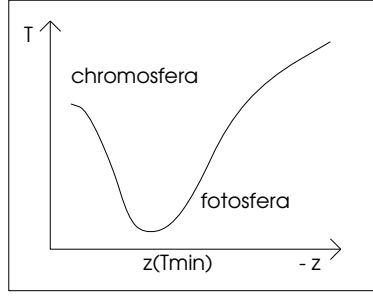
$$\Delta\nu_1 < \Delta\nu_2 \quad \Rightarrow \quad I_\nu(\Delta\nu_1) < I_\nu(\Delta\nu_2) \quad (2.23)$$

$$\mu_1 > \mu_2 \quad \Rightarrow \quad I_\nu(\mu_1) > I_\nu(\mu_2) \quad (2.24)$$

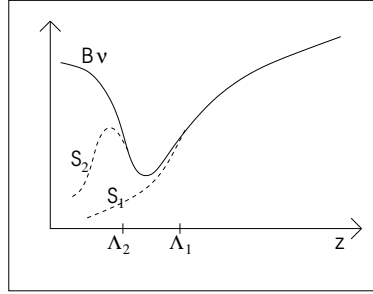
2.4 Ciekawe proste przypadki

2.4.1 Chromosfera gwiazdowa

Chromosfera to z definicji obszar atmosfery gwiazdowej, w którym ma miejsce wzrost temperatury (elektronowej) z wysokością. To zjawisko jest spowodowane innymi procesami, niż promieniste. Przykładowy przebieg temperatury dla gwiazdy z chromosferą pokazuje rysunek 2.4. Podobny do przebiegu temperatury będzie przebieg funkcji $B_\nu(T)$, czyli funkcji źródłowej w LTE. Położenie punktu Λ , od którego funkcja źródłowa zaczyna się różnić od $B_\nu(T)$ zależy od możliwości ucieczki fotonów, która z kolei zależy od nieprzezroczystości. Popatrzmy na rysunek 2.5. Jeśli dla jakiejś linii „1” Λ_1 wypada głębiej, niż $z(T_{\min})$, odpowiednia funkcja źródłowa wygląda podobnie, jak poprzednio. Jeśli jednak w linii „2” nieprzezroczystość jest odpowiednio duża, to Λ_2 wypadnie powyżej $z(T_{\min})$ i funkcja źródłowa będzie „garbata”, jak na rysunku 2.6. Przy odpowiednich z^* natężenie promieniowania $I \sim S(\eta^*/\phi(\Delta\nu))$ może mieć przebieg, jak na tym rysunku (pokazana jest tylko połowa profilu, druga jest symetryczna). Narysowany profil jest



Rysunek 2.4: Chromosfera – schematyczny przebieg temperatury.



Rysunek 2.5: Funkcja źródłowa w obecności chromosfery. Funkcja Plancka B_ν , odpowiadająca LTE, ma przebieg zgodny z rozkładem temperatury. Linia przerywaną zaznaczone są dwa przypadki, kiedy to funkcja źródłowa S zaczyna odchyłać się od B_ν na różnych głębokościach.

jakościowo bardzo podobny do obserwowanych linii chromosferycznych H i K zjonizowanego wapnia Ca II.

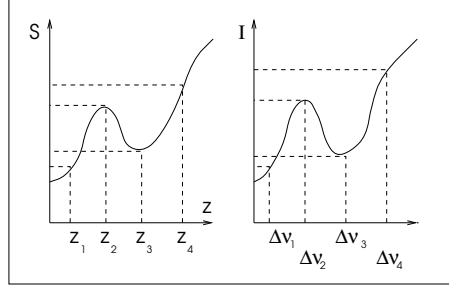
2.4.2 Warstwa płasko-równoległa optycznie cienka

To taka warstwa, w której fotony, nawet te wyemitowane w centrum linii, doznają nie więcej, niż 1–2 rozproszenia. Gdyby nie było absorpcji fotonów z reemisją, to promieniowanie powstawało by przez wzbudzenia zderzeniowe z następującą po nich depopulacją promienistą i było by

$$S \approx \epsilon B_\nu(T) \quad (2.25)$$

Ze wzrostem grubości warstwy dochodzi do znaczenia wyraz $(1 - \epsilon)\bar{J}$, ale gdy założymy, że mamy tylko jedno rozproszenie, to

$$S \approx 2\epsilon B_\nu(T) \quad (2.26)$$



Rysunek 2.6: Profil linii chromosferycznej. Przedstawione są różne głębokości ucieczki promieniowania oraz odpowiadające im częstotliwości w profilu linii widmowej. Sam kształt profilu jest odwzorowaniem przebiegu funkcji źródłowej.

Ważne jest, że promieniowanie może łatwo opuszczać warstwę z dowolnego jej miejsca, a funkcja źródłowa powinna być w przybliżeniu stała $S = \bar{S}$. Po wycalkowaniu wzoru na obserwowane natężenie (jest to łatwe, bo S jest stała) otrzymamy

$$I_\nu(0, \Delta\nu, \mu) = \bar{S} \left(1 - e^{-\frac{\phi(\Delta\nu)\tau_w}{\mu}} \right) \quad (2.27)$$

co przy grubości optycznej warstwy $\tau_w \rightarrow 0$ daje

$$I_\nu(0, \Delta\nu, \mu) = \bar{S} \frac{\phi(\Delta\nu)\tau_w}{\mu} \quad (2.28)$$

Takie natężenie, to linia emisyjna, mająca kształt funkcji ϕ profilu absorpcyjnego.

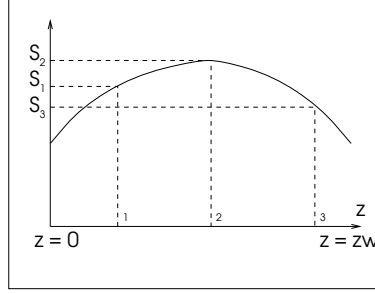
2.4.3 Warstwa płasko-równoległa optycznie gruba

Jeśli optycznie gruba warstwa będzie miała parametry (T, ϱ , itp) symetryczne względem płaszczyzny środkowej, to i funkcja źródłowa S powinna być symetryczna i powinna rosnać w głąb atmosfery niezależnie od tego, z której strony na warstwę patrzymy. Spodziewać się jej można w postaci takiej, jak na rysunku 2.7. Wybierzmy trzy częstotliwości

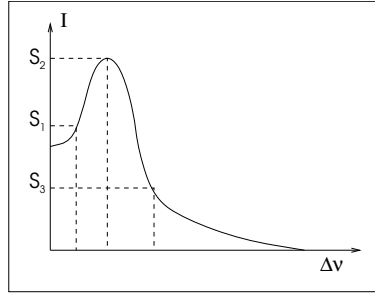
$$|\Delta\nu_1^*| < |\Delta\nu_2^*| < |\Delta\nu_3^*| \quad (2.29)$$

w taki sposób, że

$$|z_1^*| < |z_2^*| < |z_3^*| \quad (2.30)$$



Rysunek 2.7: Funkcja źródłowa w grubej warstwie płasko-równoległej, symetryczna względem środka warstwy. Punkty 1, 2, 3, przedstawiają miejsca ucieczki promieniowania na różnych częstotliwościach.



Rysunek 2.8: Linia widmowa powstająca w warstwie płasko-równoległej z rysunku 2.7.

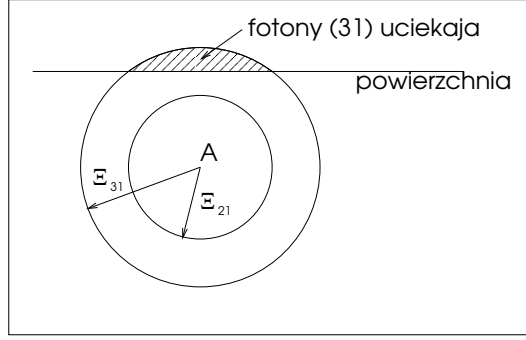
Ponieważ

$$I(0, \Delta\nu_i, 1) \approx S\left(\frac{\eta_i^*}{\phi(\Delta\nu_i)}\right) = S_i \quad (2.31)$$

otrzymamy profil, jak na rysunku 2.8, istotnie różny od przypadku poprzedniego. Gdyby jednak grubość warstwy z_w była na tyle mała, że $z_w < 2z_0^*$ (z_0^* to głębokość odpowiadająca centrum linii widmowej $\Delta\nu = 0$), czyli z_0^* wypadło by głębiej, niż połowa warstwy, wówczas zachodziło by $S_1 > S_2 > S_3$, jak w przypadku optycznie ciekim i nie było by centralnej absorpcji w profilu emisyjnym.

2.5 Atom trójpoziomowy

Dla uproszczenia założymy, że dozwolone są tylko dwa przejścia promieniste: między poziomami 1–2 i 1–3. Zderzeniowe – dozwolone są wszystkie trzy.



Rysunek 2.9: Ucieczka z powierzchni gwiazdy fotonów powstających w atomie trójpoziomowym.

Układ poziomów pozostaje taki, jak na rysunku 1.5. Dla przeprowadzenia dalszej dyskusji powróćmy do takiego przedstawienia funkcji źródłowej, w którym zależy ona od stosunku obsadzeń poziomów górnego i dolnego (wzór 1.90). Jeśli zaniedbamy emisję wymuszoną, jak to czyniliśmy wcześniej (wzór 2.7), upraszczając współczynnik nieprzezroczystości, to dla funkcji źródłowych najistotniejsze pozostają zależności

$$S_{21} \sim \frac{N_2}{N_1}, \quad S_{31} \sim \frac{N_3}{N_1} \quad (2.32)$$

a odpowiednie nieprzezroczystości będą proporcjonalne do

$$\kappa_{21} \sim \nu_{21} N_1 B_{12} \phi_{12} \quad (2.33)$$

$$\kappa_{31} \sim \nu_{31} N_1 B_{13} \phi_{13} \quad (2.34)$$

Stosunek obu nieprzezroczystości przedstawmy stosując zamiast B współczynniki A emisji spontanicznej

$$\frac{\kappa_{21}}{\kappa_{31}} \sim \frac{\nu_{21}}{\nu_{31}} \frac{\phi_{12}}{\phi_{13}} \frac{g_2}{g_3} \frac{A_{21}}{A_{31}} \frac{\nu_{31}^3}{\nu_{21}^3} \quad (2.35)$$

Przy założonym układzie poziomów zazwyczaj ma miejsce $A_{21} > A_{31}$ i o ile zachodzi $\nu_{31} > \nu_{21}$, to

$$\kappa_{21} > \kappa_{31} \quad (2.36)$$

Ze względu na stosunek nieprzezroczystości będziemy mieli dla dróg termalizacji zależność

$$\Xi_{31} > \Xi_{21} \quad (2.37)$$

Funkcje profilu ϕ mogą wprowadzać pewne komplikacje, ale je pomijamy. Głęboko w atmosferze obowiązuje LTE, zatem

$$\bar{J}_{21} \approx S_{21} \approx B_{\nu_{21}}(T) \quad (2.38)$$

$$\bar{J}_{31} \approx S_{31} \approx B_{\nu_{31}}(T) \quad (2.39)$$

W miarę przechodzenia z wnętrza ku powierzchni atmosfery pierwsze zaczęły uciekać fotony przejścia 3–1 (rysunek 2.9). Będzie to prowadziło do depopulacji poziomu 3 (N_3^-) i z konieczności ($N = N_1 + N_2 + N_3 = \text{const}$) do zwiększenia obsadzenia poziomu 1 (N_1^+). Odpowiednia funkcja źródłowa zmaleje poniżej wartości równowagowej

$$S_{31} \sim \frac{N_3}{N_1} \rightarrow \frac{N_3^-}{N_1^+} < \frac{N_3^*}{N_1^*} \sim B_{\nu_{31}}(T) \quad (2.40)$$

Obniżenie obsadzenia N_3 poniżej N_3^* powoduje zwiększenie częstości zderzeń 2–3, próbujących przywrócić naruszoną LTE. Strata elektronu N_3 będzie kompensowana przez przejścia zderzeniowe z poziomu 2

$$N_2 \rightarrow N_2^- < N_2^* \quad (2.41)$$

Braki na poziomie 2 będą z kolei rekompensowane przez przejścia promieniste i zderzeniowe z poziomu 1, które starają się zachować LTE, bo „nie widzą” powierzchni. W pełni jednak zrównoważone nie zostaną

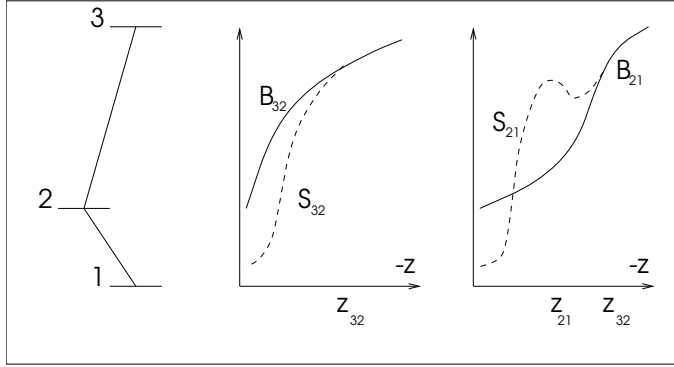
$$S_{21} \sim \frac{N_2}{N_1} \rightarrow \frac{N_2^-}{N_1^+} < \frac{N_2^*}{N_1^*} \sim B_{\nu_{21}}(T) \quad (2.42)$$

W konsekwencji obie funkcje źródłowe S_{31} i S_{21} maleją poniżej odpowiednich funkcji Plancka na głębokościach, dla których spodziewalibyśmy się, że zmaleje tylko jedna z nich.

Interpretujemy to zjawisko jako znajdowanie dodatkowych kanałów, albo ująć, fotonów 2–1 w przejście 3–1, skąd już mogą uciekać. Konwersja fotonów 2–1 na 3–1 odbywa się przez przejścia zderzeniowe 2–3. Okazuje się, że obliczona ucieczka energii dla takiego atomu trójpoziomowego jest większa, niż gdybyśmy obliczali utratę energii dla dwóch niezależnych atomów dwupoziomowych. Zjawisko to zwiększa efekty non-LTE.

Inny ciekawy przypadek ilustruje rysunek 2.10. Załóżmy, że dozwolone są tylko przejścia promieniste 1–2 i 2–3, niech przy tym $\kappa_{32} < \kappa_{21}$ oraz $\Xi_{32} > \Xi_{21}$. W miarę przechodzenia ku powierzchni atmosfery pierwsze, z głębokości z_{32} , będą uciekały fotony 3–2 prowadząc do

$$N_3 \rightarrow N_3^- < N_3^*, \quad N_2 \rightarrow N_2^+ > N_2^* \quad (2.43)$$



Rysunek 2.10: Profil linii tworzącej się w atomie trójpoziomowym.

Rezultatem zmiany obsadzeń poziomów będzie zmiana funkcji źródłowych

$$S_{32} < B_{\nu_{32}}(T), \quad S_{21} > B_{\nu_{21}}(T) \quad (2.44)$$

czyli wzrost S_{21} powyżej funkcji Plancka. Ta druga zależność będzie słuszna dopóty, dopóki fotony 2–1 nie zaczną opuszczać powierzchni, powodując na mniejszej już głębokości z_{21} , że

$$S_{21} < B_{\nu_{21}}(T) \quad (2.45)$$

O ile dla przejścia 3–2 funkcja źródłowa, bez żadnych niespodzianek, stopniowo maleje poniżej wartości równowagowej, to funkcja źródłowa i odpowiedni profil linii widmowej 2–1 mogą zachowywać się bardzo podobnie, jak w przypadku obecności chromosfery.

Rozdział 3

Rozwiązywanie równania przepływu

Zapoznamy się obecnie z różnymi przybliżonymi podejściami do rozwiązywania równania przepływu oraz klasycznymi metodami rozwiązywania numerycznego.

3.1 Promieniowanie kontinuum

3.1.1 Warunek równowagi promienistej

Głęboko w jądrze gwiazdy energia jest wyzwalana z materii i następnie dyfunduje na zewnątrz. W normalnych gwiazdach nie ma wytwarzania energii w atmosferze, atmosfera tylko transportuje energię. W stanie stacjonarnym rozkład po częstościach energii promieniowania może się zmieniać, może być różny podział między promienistym a niepromienistym transportem, ale całkowity strumień energii jest ściśle zachowany. Znane są dwa główne sposoby transportu energii w atmosferach gwiazdowych

1. promieniowanie
2. konwekcja – to bardzo wydajny sposób transportu energii, trudny do opisu matematycznego, istotny przy konstruowaniu modeli wnętrza i atmosfer gwiazdowych

Pomińmy konwekcję i przyjrzyjmy się bliżej transportowi promienistemu. Warunek równowagi promienistej w atmosferze stacjonarnej stwierdza, że całkowita energia zaabsorbowana w danym miejscu musi być równa całko-

witej energii wyemitowanej. Zróbmy więc bilans

$$\text{absorpcja : } \int_0^\infty d\nu \oint d\omega \chi_\nu I_\nu = 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu J_\nu d\nu \quad (3.1)$$

$$\text{emisja : } \int_0^\infty d\nu \oint d\omega \eta_\nu = 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu S_\nu d\nu \quad (3.2)$$

$$\text{bilans : } 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu (S_\nu - J_\nu) d\nu = 0 \quad (3.3)$$

Przypomnijmy sobie równanie przepływu w postaci

$$(\vec{n} \cdot \vec{\nabla}) I_\nu = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu) \quad (3.4)$$

całkując je po kącie bryłowym $d\omega$ otrzymamy

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F}_\nu = 4\pi \chi_\nu (S_\nu - J_\nu) \quad (3.5)$$

a następnie całkując po częstościach $d\nu$ otrzymamy

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 4\pi \int_0^\infty \chi_\nu (S_\nu - J_\nu) d\nu \quad (3.6)$$

Zatem warunek równowagi promienistej (wyżej sporządzony bilans) sprawia, że dywergencja strumienia znika

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0 \quad (3.7)$$

co w jednym wymiarze przepisuje się na zależność

$$\frac{\partial F}{\partial z} = 0 \quad \text{czyli} \quad F = \text{const} \quad (3.8)$$

a w sferycznej symetrii otrzymujemy znany już wynik

$$r^2 F = \text{const} \quad (3.9)$$

3.1.2 Równanie dyfuzyjne

Zakładamy atmosferę płasko-równoległą, w której parametry zależą tylko od kierunku pionowego z , ale natężenie promieniowania zależy również od kąta $\mu = \cos \theta$. Równanie przepływu ma wtedy postać

$$\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial z} = -\chi_\nu (I_\nu - S_\nu) \quad (3.10)$$

Przepiszmy je inaczej

$$I_\nu(z, \mu) = S_\nu(z) - \frac{\mu}{\chi_\nu} \frac{\partial I_\nu}{\partial z} \quad (3.11)$$

W pierwszym (albo lepiej – zerowym) przybliżeniu założmy, że I_ν nie zmienia się względem z , czyli $\partial I_\nu / \partial z = 0$. Wtedy otrzymamy

$$I_\nu^{(0)}(z, \mu) \approx S_\nu^{(0)}(T) \quad (3.12)$$

Ponieważ takie $I_\nu^{(0)}$ jest niezależne od kąta μ , więc można to równanie łatwo wyciągnąć po kątach, by otrzymać

$$J_\nu^{(0)} \approx S_\nu^{(0)}(T) \quad (3.13)$$

Skąd, pamiętając (wzór 1.33), że

$$S_\nu = \frac{\kappa_\nu B_\nu(T) + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (3.14)$$

otrzymujemy

$$S_\nu^{(0)} = B_\nu(T) \quad (3.15)$$

oraz

$$I_\nu^{(0)} = B_\nu(T) \quad (3.16)$$

Tak obliczone $I_\nu^{(0)}$ podstawmy do przekształconego równania przepływu, aby otrzymać kolejne przybliżenie

$$I_\nu^{(1)}(z, \mu) \approx B_\nu(T) - \frac{\mu}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z} \quad (3.17)$$

Przybliżenie to będzie o tyle słuszne, o ile pochodna będzie mała. To, z kolei, będzie uzasadnione głęboko w atmosferze, gdzie sytuacja zmienia się powoli w skali średniej drogi optycznej fotonu. Zauważmy, że otrzymaliśmy liniową zależność natężenia od kierunku μ . Mimo uproszczenia ten liniowy wyraz pozwala na uwzględnienie niezerowego strumienia. Obliczmy go

$$F_\nu(z) = 2\pi \int_{-1}^1 I_\nu^{(1)} \mu d\mu = -\frac{2\pi}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial z} \int_{-1}^1 \mu^2 d\mu = -\frac{4\pi}{3} \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.18)$$

W przekształceniach skorzystaliśmy z faktu, że składnik $B_\nu(T)$ natężenia nie zależy od μ , więc daje zerowy wkład do strumienia. Obliczmy teraz strumień całkowity, czyli wysumowany po częstościach

$$F(z) = \int_0^\infty F_\nu(z) d\nu = -\frac{4\pi}{3} \frac{\partial T}{\partial z} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu \quad (3.19)$$

Zauważmy, że temperatura i częstość są zmiennymi niezależnymi, więc możemy zamienić kolejność operacji, by otrzymać

$$\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu = \frac{\partial}{\partial T} \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{\sigma}{\pi} T^4 \right) = \frac{4\sigma}{\pi} T^3 \quad (3.20)$$

Jeśli zdefiniujemy teraz średni współczynnik absorpcji jako

$$\frac{1}{\chi_R} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu}{\int_0^\infty \frac{\partial B_\nu(T)}{\partial T} d\nu} \quad (3.21)$$

to otrzymamy

$$F(z) = -\frac{16\sigma T^3}{3\chi_R} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (3.22)$$

Powyższy wzór na strumień F nazywany jest często równaniem dyfuzji promieniowania, dlatego, że równanie to ma postać

$$[\text{strumień}] = [\text{współczynnik dyfuzji}] \times [\text{gradient wielkości fizycznej}]$$

Równanie dyfuzyjne wskazuje, że skoro z powierzchni gwiazdy uchodzi energia, to temperatura w jej wnętrzu musi wzrastać ku środkowi. Podstawiając odpowiednie stałe fizyczne oraz zakładając, że $\chi_R \approx 1$, można oszacować temperaturę w centrum Słońca $T_c \sim 6 \cdot 10^6$ K.

3.1.3 Przybliżenie Eddingtona

W przybliżeniu dyfuzyjnym założeniem było, że I_ν na dużych głębokościach zbliża się do $B_\nu(T)$. Rozpatrzmy sytuację, kiedy na dużych głębokościach I_ν zbliża się do rozkładu izotropowego, niekoniecznie do wartości równowagi termodynamicznej. Zatem zastosowanie tego drugiego przybliżenia jest szersze, niż poprzedniego. Wspomniane „zbliżanie do izotropowości” wprowadzamy rozwijając I_ν w szereg względem μ i zostawiając tylko wyrazy liniowe

$$I_\nu(\tau, \mu) = a_\nu(\tau) + b_\nu(\tau)\mu \quad (3.23)$$

stąd obliczamy momenty Eddingtona pola promieniowania

$$J = a \quad (3.24)$$

$$H = \frac{b}{3} \quad (3.25)$$

$$K = \frac{a}{3} \quad (3.26)$$

Rezultat znany jako przybliżenie Eddingtona

$$K = \frac{1}{3}J \quad (3.27)$$

Ogólnie przybliżenie Eddingtona polega na założeniu, że $K = \frac{1}{3}J$ nie tylko na dużych głębokościach ale wszędzie w atmosferze (Eddington [8]). Pozwala to uprościć rozwiązywanie równania przepływu, skorzystamy z tego w następnych rozdziałach.

3.1.4 Średni współczynnik nieprzezroczystości

Mimo znacznego postępu technik komputerowych, w wielu zagadnieniach astrofizycznych nie uwzględniamy pełnego zakresu częstości promieniowania, lecz zadowalamy się przybliżeniem szarej atmosfery (rozdz. 3.1.5). Z tego powodu współcześnie nadal potrzebny jest średni współczynnik absorpcji.

Wprowadzony powyżej średni współczynnik absorpcji χ_R nosi nazwę średniej Rosselanda, wprowadzony został do astrofizyki na początku XX wieku (Rosseland [29]). Dzięki Rosselandowi całkujemy (średnimy) nie sam współczynnik χ_ν , ale jego odwrotność $1/\chi_\nu$. W rezultacie największy wkład do całki pochodzi od najmniejszych nieprzezroczystości. Jest to korzystne, bo przy najmniejszej nieprzezroczystości ma miejsce największy przepływ promieniowania, a na najdokładniejszym opisie przepływu właśnie nam zależy. Przebieg występującej pod całką funkcji $\partial B_\nu(T)/\partial T$ jest podobny do przebiegu $B_\nu(T)$, więc dodatkowo z większą wagą uwzględniane są nieprzezroczystości o częstościach w pobliżu maksimum funkcji Plancka, czyli z zakresu, w którym przepływa najwięcej promieniowania. Z powyższych względów średnia Rosselanda jest nadal stosowana dla uśredniania bardzo dokładnie obliczonych tablic nieprzezroczystości.

Pierwsze tablice nieprzezroczystości postawały w latach 40-tych XX w. Uwzględniały przejścia związane-swobodne, swobodno-swobodne, rozpraszanie na swobodnych elektronach, z czasem dołączono absorpcję ujemnego jonu wodoru H^- i rozpraszanie Rayleigha. Cały czas jednak zakładano, że linie widmowe nie dodają niczego do średniego współczynnika Rosselanda absorpcji.

W latach 1960–1970 pojawiły się pierwsze prace uwzględniające przejścia związane-związane, wartości średniej nieprzezroczystości Rosselanda z tych obliczeń znane są jako tablice z Los Alamos (Cox i Stewart [5]; Cox, Stewart, Eilers [7]). Uwzględnione zostały przejścia w liniach widmowych, obliczano metodami mechaniki kwantowej energie poziomów, choć stopień jonizacji wynikał z równania Sahy. W latach następnych stopniowo poprawiano ta-

blice, między innymi skorygowano obfitość żelaza, lepiej uwzględniono obniżenie poziomu kontinuum jonów. Nowsza wersja tablic Los Alamos znana jest z pracy Cox i Tabor [6].

Na początku lat 80-tych okazało się, że wiele rozbieżności między modelami a obserwacjami gwiazd można wyjaśnić wprowadzając arbitralnie zmiany w tablicach nieprzezroczystości. Zainicjowało to nowe obliczenia współczynnika nieprzezroczystości, podjęte niezależnie przez dwie grupy badaczy. Rezultaty są znane pod nazwami OP i OPAL.

Oba projekty powstały ok. 20 lat temu. Nazwa OP odnosi się do nawiązanej w 1984 roku międzynarodowej współpracy pod hasłem Opacity Project. Włączone do niej zostały zespoły z Francji, Niemiec, Wielkiej Brytanii, Stanów Zjednoczonych i Wenezueli. Z kolei program OPAL został opracowany w Lawrence Livermore National Laboratory. Opisy projektów i wyniki bardzo łatwo znajdziemy w sieci WWW.

Niedawno opublikowane zostało ciekawe porównanie wyników projektów OP i OPAL (Seaton i Badnell [31]), warto się z nim zapoznać.

W projekcie OP prawdopodobieństwa obsadzeń poziomów obliczane są niezbyt rygorystycznymi metodami, dzięki czemu stają się małe dla odpowiednio wzbudzonych poziomów (mówi się o tzw. „rozcieńczaniu poziomów”) i funkcje partycji dobrze się zbiegają. Dane atomowe obliczane są wyrafinowaną metodą „R-matrix”, uwzględniane są oddziaływania konfiguracji, ale ceną za to jest wydłużony czas obliczeń. Okazuje się, że linie widmowe w OP mają szersze skrzydła, co powiększa średnią nieprzezroczystość Rosselanda. Obecnie projekt OP został uzupełniony, obejmuje następujące pierwiastki: He, C, N, O, Ne, Na, Mg, Al, Si, S, Ar, Ca, Cr, Mn, Fe, Ni. Łącznie: 11 523 624 linie widmowe i 815 989 przejść fotojonizacyjnych. Są to liczby naprawdę imponujące.

Projekt OPAL stosuje jednokonfiguracyjne funkcje falowe, dla których parametry dopasowywane są empirycznie. Nie „rozcieńcza” poziomów wzbudzonych tak bardzo, jak OP, zatem wzbudzone stany związane są znacznie bardziej obsadzone, niż w OP. To OPAL po raz pierwszy wykazał, że przejścia w jonach Fe z $N=14$ do 19 elektronów, prowadzą do istotnej cechy we współczynniku Rosselanda przy $\log(T) \approx 5.2$, która później stała się znana jako „Z-bump”.

Pierwsze dane obu projektów różniły się znacznie przy dużych temperaturach. Obecnie nadal występują pewne rozbieżności w przebiegu pochodnej κ_R po temperaturze dla gazu czysto wodorowego, nie mają jednak one istotnego wpływu na średnie współczynniki. Niewykluczone, że zastosowane procedury interpolacyjne mogą wyjaśnić obserwowane nieregularności. Tym niemniej podkreśla się bardzo dobrą zgodność obu projektów.

Jednak mimo tak znacznego postępu w obliczeniu nieprzezroczystości nie wszystko zostało wyjaśnione. Problemem okazuje się budowa Słońca. Heliosejsmologia dostarcza danych dotyczących głębokości R_{sk} strefy konwekcji: powinna ona występować przy temperaturze $\log T \approx 6.34$ i promieniu $r \approx 0.715 R_{\odot}$. Tymczasem modele teoretyczne nie odtwarzają tych wartości. Podobnie, jak przed laty, sprawdzano, czy przyczyną rozbieżności mogą być błędy w tablicach nieprzezroczystości. Najnowsze dane wskazują, że chcąc otrzymać prawidłowe modele, trzeba by zwiększyć nieprzezroczystość w pobliżu R_{sk} o około 19%, co wymagało by zwiększenia współczynnika nieprzezroczystości o ok. 10%. W wymaganym rejonie temperatur współczynniki OP i OPAL nie różnią się więcej niż o 2.5%, większa różnica nie wydaje się możliwa. Podejrzane były procedury interpolacyjne, jednak po sprawdzeniu przez zagęszczenie siatek, otrzymano znikome różnice. Wobec takiej zgodności wydaje się, że problem nie leży we współczynniku nieprzezroczystości. Zagadnienie oczekuje wyjaśnienia.

3.1.5 Atmosfera szara

To przybliżenie polega na założeniu, że współczynnik nieprzezroczystości nie zależy od częstości promieniowania: $\chi_{\nu} \equiv \chi$. Jeśli teraz oznaczymy

$$I = \int_0^{\infty} I_{\nu} d\nu \quad (3.28)$$

to równanie przepływu będzie miało postać

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - S \quad (3.29)$$

Jeśli narzucimy równowagę promienistą, to otrzymamy, że $S = J$ oraz

$$\mu \frac{dI}{d\tau} = I - J \quad (3.30)$$

Obliczmy momenty Eddingtona powyżej wypisanego równania przepływu

- całkowanie po $d\mu$: $\frac{dH}{d\tau} = J - J = 0$, czyli $H = \text{const}$
- całkowanie po $\mu d\mu$: $\frac{dK}{d\tau} = H$

To ostatnie równanie można całkować, bo $H = \text{const}$, a ponieważ $H = \frac{1}{4\pi} F$, więc

$$K(\tau) = H\tau + c = \frac{1}{4\pi} F\tau + c \quad (3.31)$$

Głęboko w atmosferze powinno obowiązywać przybliżenie Eddingtona, czyli $K = \frac{1}{3}J$, zatem

$$J(\tau) \rightarrow \frac{3}{4} \frac{F}{\pi} \tau, \quad \text{dla } \tau \gg 1 \quad (3.32)$$

Założenie za Eddingtonem, że $K = \frac{1}{3}J$ wszędzie, nie tylko głęboko, pozwala na dalszą analizę

$$J_E(\tau) = \frac{3}{4} \frac{F}{\pi} \tau + c' \quad (3.33)$$

Aby obliczyć stałą c' obliczmy strumień na powierzchni. Z rozwiązania formalnego (wzór 1.43) dla tzw. atmosfery półnieskończonej, czyli przy granicach całkowania $\tau_2 = 0, \tau_1 = \infty$, otrzymamy

$$I(0) = \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-\frac{t}{\mu}} S(t) dt \quad (3.34)$$

W równowadze promienistej zachodzi $S = J$, z czego znowu skorzystamy. Obliczmy następnie strumień

$$F(0) = \oint d\omega \mu I = \frac{F}{2} + \pi c' \quad (3.35)$$

Ponieważ w atmosferze płasko-równoległej $F = \text{const}$, więc $F(0) = F$ oraz $c' = F/2\pi$

$$J_E(\tau) = \frac{3}{4} \frac{F}{\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (3.36)$$

Założenie LTE prowadzi do tego, że $S_\nu = B_\nu(T)$, czyli w przypadku atmosfery szarej

$$S = B(T) = \frac{\sigma}{\pi} T^4 \quad (3.37)$$

W LTE zachodzi zależność $S = B = J$. Ponadto stały strumień F jest równy strumieniowi z powierzchni emitującej jak ciało doskonale czarne, który z definicji temperatury efektywnej wynosi $F = \sigma T_{\text{eff}}^4$. Z równania 3.36 otrzymamy

$$\frac{\sigma T^4}{\pi} = \frac{3}{4} \frac{\sigma T_{\text{eff}}^4}{\pi} \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (3.38)$$

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (3.39)$$

Zatem otrzymaliśmy, że $T = T_{\text{eff}}$ przy $\tau = 2/3$. Czyli znaleźliśmy głębokość optyczną warstwy, której temperatura jest równa temperaturze efektywnej gwiazdy. Możemy tę warstwę identyfikować z fotosferą. Zauważmy, że prawdopodobieństwo, że foton wysłany z $\tau = 2/3$ dotrze do powierzchni, jest

równe $e^{-2/3} \approx 1/2$. Czyli tak określona fotosfera jest miejscem w atmosferze gwiazdy rozdzielaającym uwięzienie fotonów od ich swobodnego wypływu.

Podstawiając $S(\tau) = J_E(\tau)$ do rozwiązania formalnego możemy otrzymać wzór na pociemnienie brzegowe, czyli na zależność kątową natężenia opuszczającego powierzchnię atmosfery

$$I_E(0) = \frac{3}{4} \frac{F}{\pi} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \quad (3.40)$$

$$\frac{I_E(0, \mu)}{I_E(0, 1)} = \frac{3}{5} \left(\mu + \frac{2}{3} \right) \quad (3.41)$$

Obserwacje dla Słońca potwierdzają ten wzór, tym samym sugerując równowągę promienistą w zewnętrznych warstwach atmosfery Słońca.

Pominięcie zależności pola promieniowania od częstości wydaje się być niezmiernie dużym uproszczeniem problemu. Ale okazało się bardzo praktycznym i z powodzeniem stosowanym do dzisiaj. Dla obliczania widma gwiazdowego posługujemy się oczywiście jak największą ilością wybranych częstości promieniowania. Ale gdy chcemy przepływ promieniowania połączyć z równaniami hydrodynamiki, czy budowy i ewolucji gwiazd, przybliżenie „szare” spełnia swoją rolę znakomicie.

3.2 Rozwiązywanie numeryczne

Numeryczne rozwiązywanie złożonego równania różniczkowo-całkowego, jakim jest równanie przepływu promieniowania w atmosferze gwiazdowej, wymaga innego podejścia, niż to, które znamy z klasycznej analizy matematycznej. Rozwiązania nie będziemy poszukiwali w postaci funkcji ciągłej, dającej się opisać wzorem, choćby i skomplikowanym. Będziemy poszukiwali wartości naszych niewiadomych (np. I_ν) tylko i wyłącznie w wybranych dyskretnych punktach, czyli dla wybranych głębokości, kątów i częstości. Pochodne zastąpimy odpowiednimi ilorazami różnic a całki sumami z właściwie dobranymi wagami. W ten sposób rozwiązanie równania różniczkowo-całkowego sprowadzi się do rozwiązywania układu równań liniowych względem wartości niewiadomych w wybranych punktach. Jeśli punktów wybierzemy dużo, a powinniśmy, skoro chcemy dokładnie odtworzyć przebieg zmiennych, to do rozwiązania będziemy mieli ogromny układ równań. Ale będzie to nadal układ równań liniowych, który stosunkowo prosto daje się rozwiązać przy zastosowaniu komputera.

Takie numeryczne rozwiązywanie pozwala na stosunkowo łatwe rozbudowywanie modeli komputerowych przez stopniowe dołączanie kolejnych

zjawisk fizycznych zbliżających model do rzeczywistości, jak na przykład zwiększenie liczby poziomów energetycznych i przejść pomiędzy nimi. W naturalny sposób dają się uwzględnić zjawiska dynamiczne, jak na przykład pola prędkości, można łatwo łączyć przepływ promieniowania z programami hydrodynamicznymi. W praktyce odbywa się to przez modyfikacje procedur obliczających warunki fizyczne w dyskretnych punktach siatki zmiennych.

Takie metody oczywiście mają i wady. Siatka zmiennych staje się beznaocznie duża w ogólnych przypadkach trójwymiarowych, co nawet współczesnym komputerom sprawia kłopot. Ale problem jednowymiarowy, bądź sferyczny, daje się opanować bez większych trudności. Ilość zagadnień astrofizycznych, które można w ten sposób modelować, pozostaje ogromna.

W ostatnich latach dla przepływu promieniowania opisywanego w geometrii trójwymiarowej opracowywane są metody probabilistyczne. Cieszą się coraz większą popularnością i wydaje się, że jest to właściwe podejście dla modelowania obiektów o skomplikowanych geometriach. W dalszej części książki (rozdział 5.1.3) wspomnimy o przybliżonej metodzie Soboleva, mającej zastosowanie dla wiatrów gwiazdowych. Poniżej omówione są dwa przykłady metod numerycznych pozwalające na zorientowanie się w skali problemu. Znakomity przegląd metod numerycznych opartych na algorytmie Feautrier, stosowanych w geometriach płaskich bądź sferycznych, w atmosferach statycznych lub ekspandujących, zainteresowany czytelnik znajdzie w pracach Mihalas [23] oraz Mihalas i Kunasz [25].

3.2.1 Metoda Feautrier

Metoda ta oparta jest na pomysłach utworzenia z promieniowania rozchodzącego się wzdłuż danej linii patrzenia dwóch wielkości średnich: symetrycznej i antysymetrycznej. Dzięki temu równanie przepływu przekształcone jest w równanie różniczkowe drugiego rzędu. Dlatego do rozwiązania konieczne są dwa warunki brzegowe, ale w ten sposób lepiej kontrolujemy przebieg rozwiązania na obu brzegach atmosfery.

Uwzględnijmy tylko $\mu > 0$ i wielkości odnoszące się do promieniowania biegnącego w głąb atmosfery ($\mu < 0$) oznaczmy indeksem „-”. Zapiszmy

$$I^{\pm} = I(z, \pm\mu, \nu) \quad (3.42)$$

Równanie przepływu przyjmie postać

$$\pm\mu \frac{\partial I^{\pm}}{\partial z} = \chi(S_{\nu} - I^{\pm}) \quad (3.43)$$

Definiujemy nowe zmienne

$$u = u(z, \mu, \nu) = \frac{1}{2}(I^+ + I^-) \quad (3.44)$$

$$v = v(z, \mu, \nu) = \frac{1}{2}(I^+ - I^-) \quad (3.45)$$

Dodając stronami równania przepływu dla $\pm\mu$ otrzymujemy

$$\mu \frac{\partial v}{\partial z} = \chi_\nu (S_\nu - u) \quad (3.46)$$

a z odejmowania

$$\mu \frac{\partial u}{\partial z} = -\chi_\nu v \quad (3.47)$$

Z obu tych równań, po eliminacji zmiennej v

$$-\mu^2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\chi_\nu} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \chi_\nu (S_\nu - u) \quad (3.48)$$

a przechodząc do całkowania po $\partial\tau$

$$\mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = u - S_\nu \quad (3.49)$$

Otrzymaliśmy równanie różniczkowe drugiego rzędu względem u . Dla jego rozwiązania potrzebne są dwa warunki brzegowe

- warunek powierzchniowy: dla $\tau = 0$ przyjmujemy $I^- = 0$ (atmosfera nie jest oświetlana od zewnątrz), skąd wynika, że

$$u(\tau = 0) = v(\tau = 0) \quad (3.50)$$

stąd otrzymujemy równanie na samo u

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{\tau=0} = u(\tau = 0) \quad (3.51)$$

- warunek wewnętrzny: dla τ_{\max} trzeba w jakiś sposób określić $I^+(\tau_{\max})$ (promieniowanie, które wchodzi do atmosfery od środka gwiazdy), by otrzymać

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{\tau_{\max}} = I^+(\tau_{\max}) - u(\tau_{\max}) \quad (3.52)$$

Można w tym miejscu zastosować przybliżenie dyfuzyjne (równanie 3.17)

$$I(\tau_{\max}, \mu) = B_\nu(\tau_{\max}) - \frac{\mu}{\chi_\nu} \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right)_{\tau_{\max}} \quad (3.53)$$

z którego wynika, że

$$u(\tau_{\max}) = B_\nu(\tau_{\max}), \quad v(\tau_{\max}) = -\frac{\mu}{\chi_\nu} \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right)_{\tau_{\max}} \quad (3.54)$$

a stąd warunek brzegowy na u

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)_{\tau_{\max}} = -\frac{\mu}{\chi_\nu} \left(\frac{\partial B_\nu}{\partial z} \right)_{\tau_{\max}} \quad (3.55)$$

Rozwiązanie numeryczne polega na przejściu od różniczek do ilorazów różnic. W tym celu wybieramy siatki dyskretnych wartości

- głębokości optyczne τ_d , $d = 1, \dots, D$, tak wybrane, że $\tau^1 < \tau^2 < \dots$
- kąty μ_m , $m = 1, \dots, M$
- częstości ν_n , $n = 1, \dots, N$

Oznaczmy w skrócie: $u(\tau_d, \mu_m, \nu_n) = u_{dmn}$, podobnie w będziemy indeksować pozostałe funkcje zależne od τ_d, μ_m, ν_n .

Całki zastąpimy odpowiednimi kwadraturami. Kwadratura, to nazwa w żargonie metod numerycznych algorytmu przybliżającego wartość całki. Najczęściej jest to kombinacja liniowa wartości funkcji podcałkowej w wybranych punktach, ze współczynnikami zależącymi od wybranej metody. Bez wnikania w szczegóły metody wypiszmy wzory na całki. Pamiętajmy, że funkcja źródłowa jest kombinacją liniową składnika rozproszeniowego i termicznego, możemy ją ogólnie zapisać

$$S_\nu = \alpha_\nu \int R(\nu', \nu) J_{\nu'} d\nu' + \beta_\nu \quad (3.56)$$

Gdy całki rozpiszemy na kwadratury, otrzymamy

$$S_{dn} = \alpha_{dn} \sum_{n'=1}^N a_{n'} R_{n'n} \sum_{m=1}^M b_m u_{dmn'} + \beta_{dn} \quad (3.57)$$

Sumowanie po n' ze współczynnikami $a_{n'}$ to całkowanie po częstościach, sumowanie po m ze współczynnikami b_m , to całkowanie po kierunkach (kątach). Przy różniczkowaniu po zmiennej z czy τ istotny jest indeks d , więc

pozostałą parę indeksów (m, n) możemy zastąpić jednym indeksem „ i ”, $i = 1, \dots, I$, gdzie $I = NM$. Wówczas powyższy wzór zapiszemy

$$S_{di} = \alpha_{di} \sum_{i'=1}^I R_{di'i} u_{di'} + \beta_{di} \quad (3.58)$$

Zwróćmy uwagę na fakt, że na wartość S_{di} w jednym punkcie (d, i) składają się wartości niewiadomej u_{di} we wszystkich punktach i .

Rozpisujemy pochodne na odpowiednie ilorazy różnic, na przykład

$$\left. \frac{\partial}{\partial \tau} u \right|_{\tau_d} = \frac{u_{d+1} - u_d}{\tau_{d+1} - \tau_d} \quad (3.59)$$

Nie jest to zbyt dokładne, gdyż tak określona pochodna, zamiast dotyczyć punktu d na brzegu przedziału $(d, d+1)$, dotyczy środka tegoż przedziału. Równie dobrze możemy wybrać przedział $(d-1, d)$ i otrzymać inną wartość pochodnej. Znane są różne sposoby poprawiania tej sytuacji i w podręcznikach metod numerycznych można znaleźć ich opisy. Z drugą pochodną jest już lepiej, bo określona jest w punkcie d

$$\begin{aligned} \mu^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right|_{\tau_d} &= \mu^2 \left\{ \left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{\tau_d + \frac{\tau_{d+1} - \tau_d}{2}} - \left. \frac{\partial u}{\partial \tau} \right|_{\tau_d - \frac{\tau_d - \tau_{d-1}}{2}} \right\} \frac{1}{\frac{\tau_{d+1} - \tau_d}{2} + \frac{\tau_d - \tau_{d-1}}{2}} \\ &= \mu^2 \left\{ \frac{u_{d+1} - u_d}{\tau_{d+1} - \tau_d} - \frac{u_d - u_{d-1}}{\tau_d - \tau_{d-1}} \right\} \frac{2}{\tau_{d+1} - \tau_{d-1}} \end{aligned} \quad (3.60)$$

Odpowiednio grupując wyrazy można drugą pochodną schematycznie zapisać

$$\mu^2 \left. \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right|_{\tau_d} = \mu^2 (a_d u_{d-1} + b_d u_d + c_d u_{d+1}) \quad (3.61)$$

a równanie przepływu promieniowania przybierze postać

$$\mu_i^2 (a_{di} u_{d-1,i} + b_{di} u_{di} + c_{di} u_{d+1,i}) = u_{di} - S_{di} \quad (3.62)$$

gdzie indeksy zmieniają się w zakresach: $i = 1, \dots, I$, $d = 2, \dots, D-1$. Równania dla $d = 1$ oraz $d = D$ to warunki brzegowe. Na powierzchni mamy

$$\mu \frac{u_{2,i} - u_{1,i}}{\tau_{2,i} - \tau_{1,i}} = u_{1,i} \quad (3.63)$$

Podobne równanie możemy wypisać dla wewnętrznego warunku brzegowego. Jeśli przyjrzymy się strukturze równania przepływu promieniowania, zauważymy, że dla danego indeksu i występują w nim wektory u dla głębokości

optycznych $d - 1, d, d + 1$. Sytuację komplikuje wyraz S_{di} , w którym uwikłane są wartości u_{di} , wprowadzie tylko dla jednego zadanego d ale za to dla wszystkich i .

Dla każdej głębokości d zdefiniujemy jednowymiarową macierz (wektor) \mathbf{u}_d o rozmiarze I , złożony z elementów u_{di} . Wówczas równanie przepływu promieniowania z uwzględnieniem rozpisania S_{di} można zapisać

$$-\mathbf{A}_d \mathbf{u}_{d-1} + \mathbf{B}_d \mathbf{u}_d - \mathbf{C}_d \mathbf{u}_{d+1} = \mathbf{L}_d \quad (3.64)$$

gdzie \mathbf{A} i \mathbf{C} są macierzami diagonalnymi rozmiaru $I \times I$, \mathbf{B} jest macierzą pełną $I \times I$, zawierającą jako elementy pozadiagonalne wyrazy pochodzące z całkowania S_d , \mathbf{L} jest wektorem zawierającym wyrazy pochodzenia termicznego. Do skompletowania układu potrzeba warunków brzegowych, czyli

$$\mathbf{B}_1 \mathbf{u}_1 - \mathbf{C}_1 \mathbf{u}_2 = \mathbf{L}_1 \quad (3.65)$$

$$\mathbf{A}_D \mathbf{u}_{D-1} + \mathbf{B}_D \mathbf{u}_D = \mathbf{L}_D \quad (3.66)$$

Ostatecznie otrzymamy równanie macierzowe w postaci podanej poniżej. Rozwiązujemy to równanie metodą eliminacji Gaussa.

$$\left| \begin{array}{cccc} \mathbf{B}_1 & -\mathbf{C}_1 & 0 & \dots \\ -\mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & -\mathbf{C}_2 & \\ 0 & -\mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & -\mathbf{C}_3 \\ \vdots & & & \ddots \\ & & -\mathbf{A}_{D-1} & \mathbf{B}_{D-1} & -\mathbf{C}_{D-1} \\ & & & -\mathbf{A}_D & \mathbf{B}_D \end{array} \right| \times \left| \begin{array}{c} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_{D-1} \\ \mathbf{u}_D \end{array} \right| = \left| \begin{array}{c} \mathbf{L}_1 \\ \mathbf{L}_2 \\ \mathbf{L}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{L}_{D-1} \\ \mathbf{L}_D \end{array} \right|$$

3.2.2 Metoda zmiennego czynnika Eddingtona

W rozdziale 1.6.5 wprowadziliśmy tzw. zmienny czynnik Eddingtona

$$f_\nu = \frac{K_\nu}{J_\nu} \quad (3.67)$$

Założenie, że $f_\nu = 1/3$ w całej atmosferze ułatwia rozwiązywanie, ale w zewnętrznych warstwach jest zbyt grubym przybliżeniem. Gdybyśmy umieli obliczyć przebieg f_ν z głębokością, otrzymalibyśmy rozwiązanie dokładne. Fakt ten jest wykorzystany w bardzo popularnej metodzie rozwiązywania

równania przepływu, także bazującej na uśrednionych zmiennych Feautrier. Z równania 3.49 z poprzedniego rozdziału

$$\mu^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = u - S_\nu \quad (3.68)$$

po wycalkowaniu po $d\mu$ otrzymujemy

$$\frac{\partial^2 K_\nu}{\partial \tau^2} = J_\nu - S_\nu \quad (3.69)$$

po skorzystaniu z wzoru 3.67 definiującego f_ν

$$\frac{\partial^2 (f_\nu J_\nu)}{\partial \tau^2} = J_\nu - S_\nu \quad (3.70)$$

Funkcja źródłowa S_ν jest kombinacją liniową niewiadomej J_ν oraz funkcji Plancka $B_\nu(T)$, więc otrzymaliśmy jedno równanie na J_ν . Jeszcze tylko trzeba określić warunki brzegowe i powyższe równanie można dyskretyzować tak samo, jak poprzednio. Niewiadomą tego równania jest średnie natężenie, czyli wielkość niezależna od zmiennej kątovej. Zatem w stosunku do równania na u mamy o jeden wymiar mniejsze macierze, co ułatwia obliczenia numeryczne. Rozwiązanie całego problemu polega na iteracji

1. przy zadanym S_ν (np. na początek iteracji $S_\nu = B_\nu(T)$) rozwiązujemy równanie drugiego rzędu względem $u(\mu, \nu)$, osobno dla każdej częstości ν i kąta μ , mamy w tym przypadku do rozwiązania równanie macierzowe, z macierzą trójdziagonalną \mathbf{T} , odpowiadającą rozpisanie drugiej pochodnej na składowe

$$\mathbf{T}_i \mathbf{u}_i = \mathbf{S}_i \quad (3.71)$$

2. mając obliczone u_{dmn} wyznaczamy zmienny czynnik Eddingtona

$$f_{dn} = \frac{\sum_m b_m \mu_m^2 u_{dmn}}{\sum_m b_m u_{dmn}} \quad (3.72)$$

3. znając f_n rozwiązujemy równanie drugiego rzędu względem J_ν

4. na podstawie J_ν wyznaczamy nowe S_ν i powtarzamy iterację.

Zyskujemy znacznie na czasie obliczeń, gdyż nie musimy posługiwać się pełnymi macierzami, jak w metodzie Feautrier, a tylko macierzami diagonalnymi. Ponadto na etapach 1. i 3. powyższego schematu można wykorzystać te same procedury numeryczne, gdyż struktura równań na u i na J jest taka sama. Praktyka pokazuje, że iteracje szybko się zbiegają, zysk jest realny, na iteracjach nie tracimy czasu zyskanego dzięki zmniejszeniu rozmiarów macierzy.

3.3 Widmo liniowe

3.3.1 Równanie Milne-Eddingtona

Do tej pory rozpatrywaliśmy linie widmowe oraz promieniowanie kontinuum oddzielnie. W atmosferach gwiazdowych oba te zjawiska występują łącznie. Zapoznajmy się z bardzo uproszczonym podejściem do tego problemu, pamiętając, że dokładne jego potraktowanie jest możliwe dopiero przy zastosowaniu metod numerycznych. Przypomnijmy dla linii widmowej równanie przepływu promieniowania

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = \kappa_\nu (S_\nu - I_\nu) \quad (3.73)$$

gdzie

$$\kappa_\nu = \chi_l \phi_\nu, \quad S_\nu = (1 - \epsilon) \bar{J} + \epsilon B_\nu(T) \quad (3.74)$$

Dla promieniowania w kontinuum równanie miało postać

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = \chi_\nu (S_\nu - I_\nu) \quad (3.75)$$

gdzie

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} \quad (3.76)$$

przy czym dla promieniowania termicznego

$$\chi_\nu = \kappa_c, \quad S_\nu = B_\nu(T) \quad (3.77)$$

a dla rozpraszania

$$\chi_\nu = \sigma, \quad S_\nu = J_\nu \quad (3.78)$$

Połączmy te dwa równania w jedno

$$\mu \frac{dI_\nu}{dz} = -(\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma) I_\nu + \chi_l \phi_\nu \epsilon B_\nu(T) + \chi_l \phi_\nu (1 - \epsilon) \bar{J} + \kappa_c B_\nu(T) + \sigma J_\nu \quad (3.79)$$

Założmy teraz, że rozpraszanie w liniach widmowych jest koherentne, czyli możemy podstawić $\phi_\nu = \delta(\nu)$. Wtedy

$$\bar{J} = \int J_\nu \phi_\nu d\nu = J_\nu \quad (3.80)$$

i zamiast dwóch różnych średnich natężeń mamy jedno. Wprowadźmy jedną, połączoną z linii i kontinuum, głębokość optyczną

$$d\tau_\nu = -(\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma) dz \quad (3.81)$$

Otrzymamy równanie przepływu

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \frac{\epsilon \chi_l \phi_\nu + \kappa_c}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma} B_\nu(T) + \frac{(1 - \epsilon) \chi_l \phi_\nu + \sigma}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma} J_\nu \quad (3.82)$$

a po zastąpieniu symbolem λ_ν ułamka

$$\lambda_\nu = \frac{\epsilon \chi_l \phi_\nu + \kappa_c}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c + \sigma} \quad (3.83)$$

otrzymamy równanie

$$\mu \frac{dI_\nu}{d\tau_\nu} = I_\nu - \lambda_\nu B_\nu(T) - (1 - \lambda_\nu) J_\nu \quad (3.84)$$

Jest to tzw. równanie Milne-Eddingtona. Pamiętajmy o jego wadach: rozpraszanie w rzeczywistości nie jest koherentne, do obliczenia współczynników nieprzezroczystości trzeba skądś znać obsadzenia poziomów (np. z założenia LTE), a atomy mają więcej, niż dwa poziomy.

Zakładamy dalej, że $\epsilon, \sigma, \kappa_c, \lambda_\nu$ nie zależą od głębokości optycznej kontinuum $\tau = \kappa_c + \sigma$. Zakładamy ponadto, że $B_\nu(T)$ jest liniowa względem zmiennej τ

$$B_\nu(T) = a + b\tau \quad (3.85)$$

Przez β oznaczamy stosunek nieprzezroczystości w linii do tej w kontinuum

$$\beta = \frac{\chi_l \phi_\nu}{\kappa_c + \sigma} \quad (3.86)$$

Wówczas otrzymamy

$$\frac{\tau}{\tau_\nu} = \frac{1}{1 + \beta} \quad (3.87)$$

$$B_\nu(T) = a + b\tau = a + \frac{b}{1 + \beta} \tau_\nu = a + p_\nu \tau_\nu \quad (3.88)$$

Obliczmy momenty Eddingtona równania przepływu promieniowania

$$\frac{dH_\nu}{d\tau_\nu} = \lambda_\nu (J_\nu - B_\nu(T)) \quad (3.89)$$

$$\frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} = H_\nu \quad (3.90)$$

Stosując przybliżenie Eddingtona ($K = \frac{1}{3}J$) otrzymamy

$$\frac{1}{3} \frac{d^2 J}{d\tau_\nu^2} = \frac{d^2 K}{d\tau_\nu^2} = \frac{dH}{d\tau_\nu} = \lambda_\nu (J_\nu - B_\nu(T)) \quad (3.91)$$

a ponieważ funkcja $B_\nu(T)$ jest liniowa, więc jej druga pochodna jest zerem i można ją dodać do równania, otrzymując

$$\frac{1}{3\lambda_\nu} \frac{d^2}{d\tau_\nu^2} (J_\nu - B_\nu(T)) = J_\nu - B_\nu(T) \quad (3.92)$$

Problem jest znany, równanie ma postać równania oscylatora harmonicznego, którego rozwiązania szukamy w postaci

$$J_\nu - B_\nu(T) = \alpha_\nu e^{-\sqrt{3\lambda_\nu}\tau_\nu} + \beta_\nu e^{\sqrt{3\lambda_\nu}\tau_\nu} \quad (3.93)$$

Do rozwiązania potrzebujemy znajomości współczynników α i β . Głęboko w atmosferze zakładamy oczywiście LTE. Aby w $\tau_\nu \rightarrow \infty$ miało miejsce $J_\nu = B_\nu(T)$, musi zachodzić $\beta_\nu = 0$. Współczynnik α_ν trzeba wyznaczyć z warunku brzegowego na powierzchni. Zakładamy tam prostą sytuację: dla $\mu < 0$ przyjmujemy $I_\nu = 0$, a dla $\mu > 0$ zakładamy, że $I_\nu = I$, czyli nie zależy od μ . Wówczas

$$J(0) = \frac{1}{2}I \quad (3.94)$$

$$H(0) = \frac{1}{4}I \quad (3.95)$$

czyli

$$J(0) = 2H(0) \quad (3.96)$$

a stąd, po niezbyt skomplikowanych obliczeniach

$$\alpha_\nu = \frac{2p_\nu - 3a}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}} \quad (3.97)$$

Czyli mamy już wzór na średnie natężenie

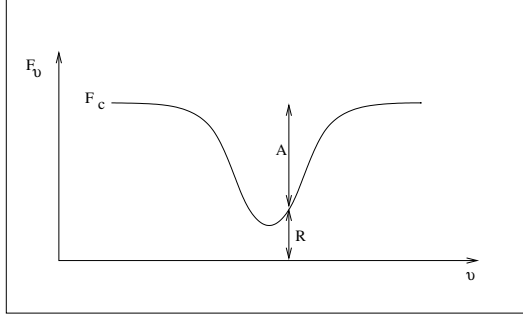
$$J_\nu = a + p_\nu\tau_\nu + \frac{2p_\nu - 3a}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}} e^{-\sqrt{3\lambda_\nu}\tau_\nu} \quad (3.98)$$

Dalej obliczamy strumień opuszczający powierzchnię atmosfery

$$H_\nu(0) = \frac{\sqrt{3\lambda_\nu}}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}} a + \frac{p_\nu}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}} \quad (3.99)$$

Obliczmy teraz strumień bez linii, w samym kontinuum, czyli zamiast λ_ν podstawiamy $\lambda_c = \frac{\kappa_c}{\kappa_c + \sigma}$ oraz $p_\nu = b$

$$H_c(0) = \frac{\sqrt{3\lambda_c}}{3 + 2\sqrt{3\lambda_c}} a + \frac{b}{3 + 2\sqrt{3\lambda_c}} \quad (3.100)$$



Rysunek 3.1: Definicje strumienia resztkowego R oraz absorpcji A w linii widmowej.

Dla linii widmowej, o strumieniu opisywanym zależnością F_ν , widocznej na tle kontinuum F_c (zobacz rysunek 3.1), definiujemy tzw. strumień resztkowy

$$R = \frac{F_\nu}{F_c} \quad (3.101)$$

w naszym przybliżonym modelu otrzymamy

$$R = \frac{H_\nu(0)}{H_c(0)} = \frac{a\sqrt{3\lambda_\nu} + p_\nu}{3 + 2\sqrt{3\lambda_\nu}} \cdot \frac{3 + 2\sqrt{3\lambda_c}}{a\sqrt{3\lambda_c} + b} \quad (3.102)$$

Strumień resztkowy R jest to wielkość, którą porównujemy z obserwacjami, potwierdzającymi (lub nie) słuszność naszego modelu.

Dla przedyskutowania dwóch skrajnych przypadków linii widmowych uprościmy zagadnienie zakładając $\sigma = 0$, czyli bez rozpraszania w kontinuum. Mamy do rozpatrzenia dwa przypadki

1. $\epsilon = 0$ – linia rozproszeniowa

$$\lambda_\nu = \frac{\kappa_c}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c}, \quad p_\nu = \frac{b\kappa_c}{\chi_l \phi_\nu + \kappa_c} \quad (3.103)$$

Jeśli linia jest silna, tzn. $\chi_l \phi_\nu \gg \kappa_c$, to otrzymamy, że $\lambda_\nu \rightarrow 0$ i $p_\nu \rightarrow 0$, czyli $R_\nu \rightarrow 0$. Inaczej mówiąc fotony są rozpraszane ze środka linii „aż do skutku”.

2. $\epsilon = 1$ – linia absorpcyjna. Dla niej $\lambda_\nu = 1$, a jeśli linia ma być silna, to $p_\nu \rightarrow 0$ i w rezultacie

$$R_\nu = \frac{a\sqrt{3}}{a\sqrt{3} + b} \neq 0 \quad (3.104)$$

W centrum silnej linii absorpcyjnej natężenie nie spada do zera, widoczne są warstwy zewnętrzne i odpowiadający im strumień Plancka.

Czyli już na podstawie pobieżnej analizy obserwowanych silnych linii widmowych, patrząc tylko, czy dana linia jest wysycona do zera, czy nie, wiemy jakie procesy są dominujące w jej powstawaniu.

Eddington [8] prowadził rozważania powstawania linii widmowej na tle kontinuum w oparciu o nieco inne sformułowania równań. Te podane powyżej są przytoczone we współczesnej wersji według podręcznika Mihalasa [24]. Ciekawie czyta się o tym, jak Eddington nie potrafił poradzić sobie z problemem atomu wielopoziomowego z wieloma dozwolonymi przejściami. We wspomnianej pracy przyznawał, że jest bezradny. To, co dziś w oparciu o metody numeryczne wydaje się łatwe, wtedy, przed niemal stu laty, było nieosiągalne.

3.3.2 Krzywa wzrostu

Definiujemy kolejną wielkość – absorpcję w linii (zobacz rysunek 3.1)

$$A_\nu = \frac{F_c - F_\nu}{F_c} \quad (3.105)$$

Oczywiście będzie zachodziło

$$A_\nu = \frac{H_c(0) - H_\nu(0)}{H_c(0)} \quad (3.106)$$

Kontynuujemy rozważania w oparciu o równanie Milne-Eddingtona. Upraszczamy analizę zakładając LTE (wtedy nie ma rozpraszania $\sigma = 0$) oraz, że linia widmowa formuje się w warstwie o jednorodnej temperaturze i gęstości elektronowej. Stąd wynika

$$\lambda_\nu = 1, \quad \lambda_c = 1, \quad p_\nu = \frac{b}{1 + \beta} \quad (3.107)$$

$$H_\nu(0) = \frac{a\sqrt{3}}{3 + 2\sqrt{3}} + \frac{b}{3 + 2\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{1 + \beta} = A + \frac{B}{1 + \beta} \quad (3.108)$$

$$H_c(0) = A + B \quad (3.109)$$

$$A_\nu = \frac{B}{A + B} \left(1 - \frac{1}{1 + \beta} \right) = A_0 \frac{\beta}{1 + \beta} \quad (3.110)$$

Zdefiniujmy tzw. **szerokość równoważną** linii

$$W_\nu = \int_0^\infty A_\nu d\nu \quad (3.111)$$

Jeśli strumień promieniowania, taki, jak na rysunku 3.1, unormujemy do jedności, to szerokość równoważna odpowiada szerokości prostokąta o jednostkowej wysokości i o polu takim, jak to zawarte między linią widmową a poziomem kontinuum. Stąd wywodzi się nazwa tej wielkości. Skoro wysokość prostokąta wynosi 1, to jego pole wyrażamy w jednostkach długości fali, najczęściej w mÅ. Jest to wielkość charakteryzująca całkowitą absorpcję w linii, taka sama szerokość równoważna może odpowiadać zarówno linii głębokiej i wąskiej, jak i szerokiej a płytkiej.

Jeśli zmienimy zmienną całkowania z ν na $\Delta\nu = \nu - \nu_0$, to przy założeniu, że linia jest symetryczna względem ν_0

$$W_\nu = 2A_0 \int_0^\infty \frac{\beta(\Delta\nu)}{1 + \beta(\Delta\nu)} d(\Delta\nu) \quad (3.112)$$

Wróćmy do definicji β , podstawiając funkcję profilu absorpcyjnego Voigta (wzór 1.78)

$$\beta = \frac{\chi_l \phi_\nu}{\kappa_c} = \frac{\chi_0}{\kappa_c} H(a, x) = \beta_0 H(a, x) \quad (3.113)$$

gdzie

$$a = \frac{\Gamma}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}}, \quad x = \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}} \quad (3.114)$$

Profil Voigta jest bardziej realistyczny od profilu Dopplera, przypomnijmy (rysunek 1.4), że charakterystyczne dla niego są szerokie skrzydła linii rozwijające się stopniowo, gdy linia staje się coraz silniejsza. Zastąpmy zmienną całkowania $d(\Delta\nu)$ na dx taką, że $d(\Delta\nu) = \Delta\nu_{\text{Dopp}} dx$ i wprowadźmy nową wielkość, tzw. zredukowaną szerokość równoważną

$$W^* = \frac{W}{2A_0 \Delta\nu_{\text{Dopp}}} \quad (3.115)$$

Wówczas otrzymujemy

$$W^* = W^*(a, \beta_0) = \int_0^\infty \frac{\beta_0 H(a, x)}{1 + \beta_0 H(a, x)} dx \quad (3.116)$$

W podanym wyżej wzorze na β występuje nieprzezroczystość w linii χ_l , która w przypadku LTE wyraża się formułą

$$\chi_l = \frac{h\nu}{4\pi} N_L^* B_{LU} \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) = \frac{\pi e^2}{mc} f_{LU} N_L^* \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \quad (3.117)$$

W drugiej równości zamiast współczynnika Einsteina B_{LU} wprowadzona została tzw. moc oscylatora f_{LU} , z czym powiązana jest zamiana niektórych

współczynników. Jest to zależność często stosowana. Jeśli teraz nieprzezroczystość w kontinuum zapiszemy jako: $\kappa_c = k_c(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}})$ (zabieg formalny dla uproszczenia notacji, choć można to interpretować jako korektę na emisję wymuszoną), to

$$\beta_0 = \frac{\pi e^2}{mc} f_{\text{LU}} N_{\text{L}}^* \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right) \frac{1}{\kappa_c} \frac{1}{\Delta\nu_{\text{Dopp}} \sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{\pi} e^2}{mc} \frac{f_{\text{LU}} N_{\text{L}}^*}{k_c} \frac{c}{v_0 \nu} \quad (3.118)$$

Zależność W^* od β_0 nazywamy **krzywą wzrostu**.

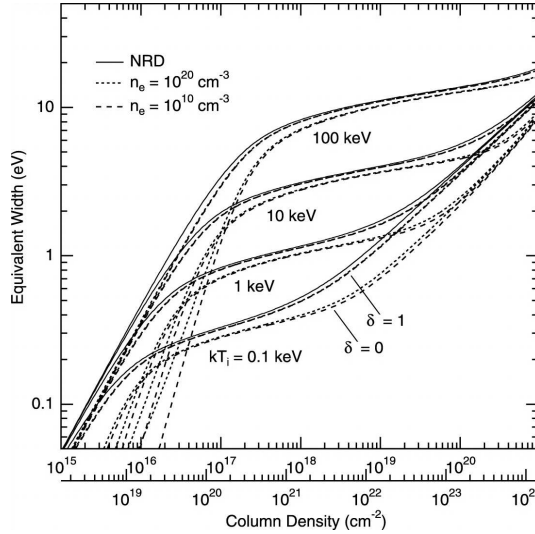
Całkę w wyrażeniu W^* można w przybliżeniu oszacować

1. dla słabych linii $\beta_0 < 1$ oraz zachodzi $W^* \sim \beta_0$, czyli jest proporcjonalne do ilości absorbujących atomów
2. gdy linia widmowa sięga maksymalnej głębokości, ale ma ciągle słabe skrzydła, to $W^* \sim \sqrt{\ln \beta_0}$
3. gdy w profilu linii dominują skrzydła, to $W^* \sim \sqrt{\beta_0}$

Jakie procesy fizyczne kryją się za powyższymi zależnościami? Rozważmy, jak może zachowywać się linia widmowa, gdy będzie stopniowo przybywało absorbujących atomów

1. Na początku, gdy mamy mało atomów, każdy atom dodany będzie zdolny absorbować. Na siłę linii będzie wpływać tylko jądro dopplerowskie, skrzydła będą przezroczyste. Jest to liniowa część krzywej wzrostu.
2. W pewnym momencie jądro linii stanie się całkiem nieprzezroczyste, czyli wszystkie fotony, które mogą zostać zaabsorbowane, zostaną zaabsorbowane. Dopóki nie rozwiną się skrzydła, dodatkowe atomy niewiele zmieniają w profilu. Jest to część nasyciona (płaska) krzywej wzrostu.
3. Kiedy ueziera się wystarczająco dużo absorbera, by skrzydła stały się znaczące, szerokość równoważna linii znów wzrasta. Mówimy o części tłumieniowej lub pierwiastkowej krzywej wzrostu.

Rysunek 3.2 przedstawia przykładowe krzywe wzrostu, ilustrując omawiane powyżej części składowe krzywych. Pochodzi z pracy Masai i Ishida [21], w której obliczane są krzywe wzrostu dla linii zakresu rentgenowskiego widma dla helo- i wodoropodobnych jonów kilku różnych pierwiastków. Dobór jednostek na osiach współrzędnych wynika ze specyfiki przyjętego modelu.



Rysunek 3.2: Przykładowe krzywe wzrostu. Rysunek dotyczy wodoropodobnej linii rezonansowej tlenu z zakresu rentgenowskiego widma. Krzywe wzrostu są obliczone dla różnych wartości temperatury kinetycznej i gęstości elektronowej.

3.3.3 Wyznaczanie obfitości metodą krzywej wzrostu

Najprostsze ideowo jest obliczenie krzywej wzrostu dla każdej mierzonej linii, przy zastosowaniu modelu fotosfery, który uwzględnia równowagę jonizacyjną, wzbudzeniową, zmiany współczynników nieprzezroczystości, numeryczne całkowanie równania przepływu promieniowania. Krzywa wzrostu przedstawia wówczas zależność zredukowanej szerokości równoważnej W^* od β_0 . Mierząc w widmie W odczytujemy z krzywej wartość β_0 , a stąd wyliczamy obfitość N_L danego pierwiastka.

W podanym wcześniej wzorze na β_0 występuje średnia prędkość ruchów termicznych v_0 , której wartości nie znamy. Zgadujemy zatem jej wartość. Po obliczeniu obfitości danego pierwiastka z wielu jego różnych linii może okazać się, że obfitość jest funkcją szerokości równoważnej W , a nie powinna. Interpretuje się to jako zły wybór v_0 . Trzeba tę wartość poprawić i obliczać obfitości jeszcze raz.

Teoretycznie dla każdej linii widmowej krzywa wzrostu jest inna. Ale niedokładności pomiarów szerokości równoważnych oraz słaba znajomość mocy oscylatorów f_{LU} powodują większy rozrzut punktów obserwacyjnych, niż wynoszą różnice między indywidualnymi krzywymi wzrostu. Zatem zamiast liczyć wiele krzywych wzrostu, przyjmujemy, że dla badanej gwiazdy

o danej temperaturze efektywnej T_{eff} istnieje jedna standardowa krzywa wzrostu.

Wielkość β_0 jest funkcją obfitości N_L danego pierwiastka oraz stałych fizycznych charakteryzujących daną linię widmową. Konstruując teoretyczną krzywą wzrostu nie zmienialiśmy wartości tych stałych, lecz tylko obfitość pierwiastka. Dla porównań z obserwacjami możemy zmienić sytuację i na wykres nanosić punkty odpowiadające różnym liniom danego pierwiastka. Będziemy mieli wówczas ustaloną obfitość N_L a zmieniać się będą wartości stałych atomowych, czyli też zmieniać się będzie parametr β_0 . Otrzymamy zależność W od β_0 , czyli też krzywą wzrostu.

Najlepsze dopasowanie do siebie krzywych obserwacyjnej i teoretycznej pozwala wyznaczyć obfitość N_L pierwiastka oraz poszerzenie termiczne v_0 . Szczegóły techniczne wyznaczania obfitości pierwiastków metodą krzywej wzrostu, różne wersje tej metody, referencje do prac źródłowych, opisane są wyczerpująco np. w podręczniku D.F.Gray'a [12].

Choć wyznaczanie obfitości metodą krzywej wzrostu zostało przez lata dopracowane w szczegółach, to w ostatnim czasie do analizy widm optycznych stosowane jest dopasowywanie widm syntetycznych, omawiane w rozdziale 3.4.3. Tym niemniej wspomniana metoda nie odeszła w zapomnienie, nadal jest stosowana w przypadkach, kiedy trudno o dokładne widma wysokiej zdolności rozdzielczej, a dostępne są pomiary szerokości równoważnych. Pokazany na rysunku 3.2 przykład został specjalnie wybrany z pracy bardzo aktualnej, dotyczącej analizy widm rentgenowskich. Ponadto metodę krzywej wzrostu stosuje się do analiz składu chemicznego obiektów pozagalaktycznych, zarówno dla linii jonów zakresu optycznego, jak i linii molekularnych zakresu podczerwonego widma.

3.4 Modele atmosfer gwiazdowych

3.4.1 Zagadnienie ogólne

Problem sporządzenia modelu atmosfery gwiazdowej polega na znalezieniu takiej struktury warstwy gazowej, żeby spełnione były jednocześnie równania równowagi hydrostatycznej oraz zachowania energii. Przez „strukturę” należy rozumieć zależność od promienia takich wielkości, jak temperatura, gęstość, ciśnienie, głębokość optyczna. Oczywiście chcemy także znać widmo promieniowania opuszczającego powierzchnię gwiazdy.

W najprostszej wersji atmosferę gwiazdy przybliżamy warstwą płasko-równoległą, czyli zakładamy, że grubość samej atmosfery jest bardzo mała w porównaniu z promieniem gwiazdy. Wówczas możemy przyjąć, że pole

grawitacyjne w atmosferze jest stałe i opisywane przez przyspieszenie grawitacyjne g .

Równanie równowagi hydrostatycznej jest szczególną postacią równania pędu (wzór 4.19) dyskutowanego w dalszej części pracy. W najprostszej wersji, w geometrii płasko-równoległej i przy stałym g , jest ono dobrze znane jako

$$\frac{dp}{dz} = -g\rho \quad (3.119)$$

Zmienna p oznacza ciśnienie całkowite, a więc sumę ciśnienia gazu p_g oraz ciśnienia promieniowania p_r (równanie 1.147).

Równanie zachowania energii to znane już nam równanie równowagi promienistej (wzór 3.7). W atmosferze płasko-równoległej obowiązuje oczywiście w postaci określonej równaniem 3.8, czyli

$$F = \text{const}$$

Jeśli zachodzi potrzeba uwzględnienia transportu konwektywnego energii, wówczas sytuacja już nie jest taka prosta. Przed laty została opracowana „teoria średniej drogi mieszania”, która dostarcza wzorów na strumień konwektywny, dających się połączyć z równaniami budowy atmosfery. Choć teoria ta bywa powszechnie krytykowana, to jednak ze względu na łatwość jej implementacji, bywa często stosowana i można ją znaleźć nawet w najnowszych modelach. W naszych rozważaniach konwekcję pomijamy, omawiamy atmosfery w równowadze promienistej.

Konstruowanie modelu atmosfery gwiazdowej z reguły przeprowadzane jest w dwóch etapach, z których każdy zależy od tego drugiego. Jeden z tych etapów, to rozwiązywanie równania przepływu promieniowania w atmosferze o zadanej strukturze, drugi, to obliczanie parametrów gazu będącego w równowadze hydrostatycznej przy zadanym polu promieniowania. Procedura polega na alternatywnym rozwiązywaniu obu części dopóki iteracje nie zbiegną się. Pole promieniowania, od którego zaczynamy iteracje, najprawdopodobniej nie jest tym właściwym i nie spełnia warunku równowagi promienistej. Wyznaczone odchyłki od równowagi promienistej są wykorzystywane do korekty struktury atmosfery.

W „klasycznym” modelu atmosfery gwiazdowej parametrami definiującymi model są: temperatura efektywna, T_{eff} , określająca równowagowy strumień energii promieniowania; przyspieszenie grawitacyjne, g , określające równowagę hydrostatyczną oraz skład chemiczny. Zmienną, której wartość poprawiamy w kolejnych iteracjach, jest przebieg temperatury w funkcji głębokości z . W podręcznikach (np. Mihalas [24]) omawiane są szczegółowo iteracyjne procedury korekty temperatury.

3.4.2 Modele atmosfery szarej

W przypadku atmosfery szarej, płasko-równoległej, w równowadze promienistej, w LTE i z przybliżeniem Eddingtona problem jest łatwiejszy do rozwiązania. Stały strumień przechodzący przez szarą atmosferę, to oczywiście

$$F = \sigma T_{\text{eff}}^4$$

Wzór 3.39 określa przebieg temperatury z głębokością optyczną

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right)$$

Łatwo wyprowadzić z niego wzór na gradient temperatury. Jeśli tylko zmienną bieżącą modelu będzie głębokość optyczna τ , to równanie powyższe wyznacza nam przebieg temperatury, a więc nie trzeba go iterować.

Dogodnie jest sformułować równania opisujące atmosferę w postaci różniczkowej. Wówczas możemy je całkować startując z odpowiednich warunków brzegowych. Wymieńmy te równania:

1. równanie energii, czyli równanie równowagi promienistej, pozwalające wyznaczyć gradient temperatury
2. równanie równowagi hydrostatycznej wyznaczające gradient ciśnienia
3. równanie ciągłości, kontrolujące zachowanie masy, określające przebieg gęstości z głębokością
4. równanie nieprzezroczystości pozwalające obliczyć głębokość optyczną

Szczegółowa ich postać zależy od wielu założeń modelu, przyjętych uproszczeń oraz określonych celów, dla których model konstruujemy. Wyglądają one inaczej w każdej z publikacji. Zainteresowanemu czytelnikowi polecam wersję opisaną w klasycznej już pracy B. Paczyńskiego [27], w której równania są sformułowane w sferycznej symetrii oraz uzupełnione o konwekcję.

Oczywiście współczesne komputery pozwalają na obliczanie znacznie bardziej skomplikowanych modeli, niż ten szary. W kolejnych rozdziałach omówimy to zagadnienie. Ale warto pamiętać, że jeśli zachodzi potrzeba szybkiego policzenia tysięcy modeli, jak choćby przy modelowaniu ewolucji gwiazd, kiedy atmosfera jest tylko dodatkiem, a głównym tematem badań są przemiany zachodzące w jądrze gwiazdy, to model szary nadal znajduje zastosowanie.

3.4.3 Modele Kurucza

Pisząc o widmie liniowym atmosfer gwiazdowych, nie sposób nie wspomnieć o dorobku Roberta L. Kurucza. Swoją aktywność naukową poświęcił opracowaniu i rozwijaniu programów komputerowych odtwarzających widma gwiazd. Tzw. „modele Kurucza” są ogólnie dostępne w sieci WWW¹. Tam też można znaleźć opisy oprogramowania oraz publikacje autora komentujące wyniki.

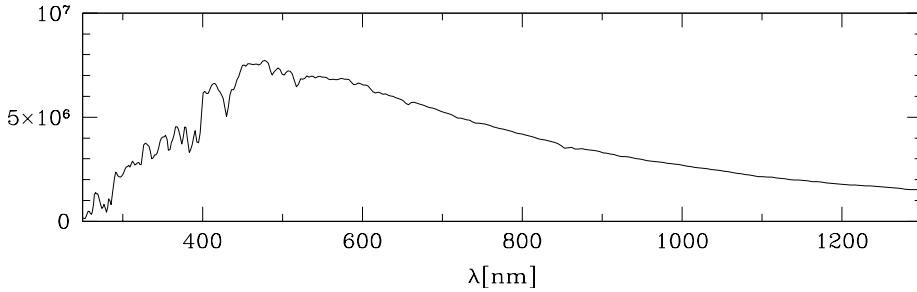
Modele Kurucza to jednowymiarowe, płasko-równoległe modele atmosfer gwiazdowych, zakładające LTE, równowagę hydrostatyczną, uwzględniające tylko promienisty i konwektywny transport energii, bez ruchów falowych, pól magnetycznych, gdzie wszystkie parametry są uśrednione w kierunku horyzontalnym. Większość omawianych przez nas wcześniej uproszczeń została zastosowana, ale z najważniejszym wyjątkiem: atmosfera nie jest szara, współczynnik nieprzezroczystości zmienia się z długością fali. Parametry opisujące atmosferę wyznaczone są iteracyjnie. Odgadnięty rozkład temperatury na siatce punktów głębokości w atmosferze prowadzi do obliczania ciśnienia, gęstości i nieprzezroczystości w każdym z punktów. Na podstawie tych danych obliczane jest pole promieniowania i strumień konwektywny w każdym z punktów. Dopóki całkowity strumień nie zgadza się z założonym stałym strumieniem, zmieniany jest rozkład temperatury według schematu „korekty temperatury”. Cały proces jest powtarzany do uzyskania stałego strumienia w granicach małego błędu.

Wartość modeli Kurucza wynika z uwzględnienia ogromnej liczby linii widmowych. Dla obliczania współczynnika absorpcji Kurucz wprowadził tzw. ODF (opacity distribution function) pozwalające na znaczne zredukowanie siatki częstości promieniowania w kontinuum w stosunku do siatki potrzebnej dla modelowania linii widmowych. Takie uwzględnienie nieprzezroczystości linii w sposób statystyczny okazuje się do dzisiaj bardzo praktyczne, choć, jak pisze sam autor, obecnie w zasadzie byłoby możliwe włączenie wszystkich linii widmowych do programu liczącego model atmosfery.

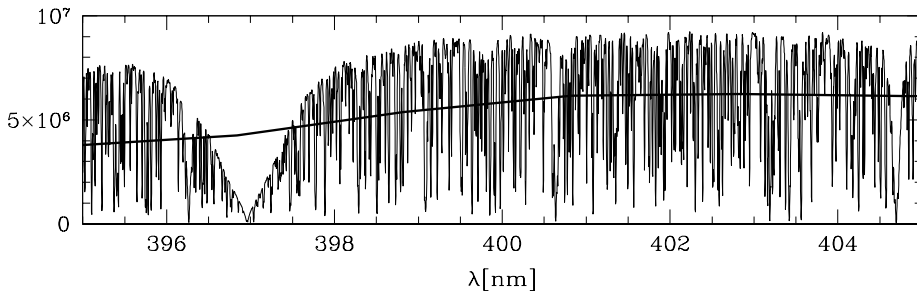
Dla potrzeb swoich modeli Kurucz obliczył dane dotyczące 42 milionów linii pierwiastków grupy żelaza, pozabierał z literatury dane dla wszystkich pierwiastków, obliczył dane liniowe dla 16 milionów linii molekuł dwuatomowych. Opracował tabele nieprzezroczystości dla ponad 30 zestawów obfitości dla temperatur od 2 000 do 200 000 K wykorzystując wszystkie 58 milionów linii przy 3.5 milionach długości fali od 10 nm do 10 000 nm. Dodał linie TiO i H₂O, co powiększyło listę linii do 154 milionów.

Obliczył 9000 modeli dla szerokiego zakresu obfitości dla temperatur

¹pod adresem <http://kurucz.harvard.edu/>



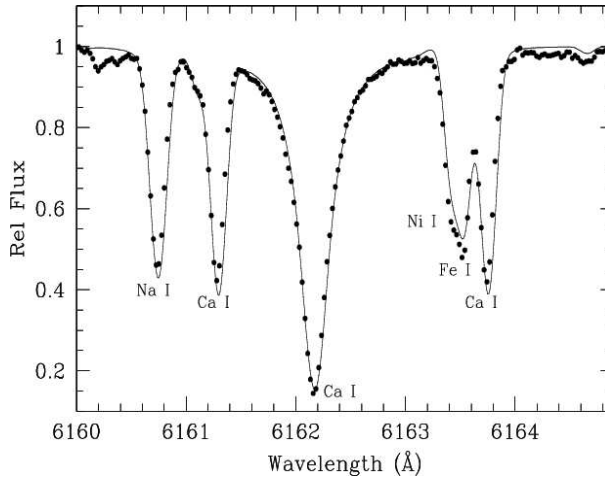
Rysunek 3.3: Widmo słoneczne w niskiej zdolności rozdzielczej $R=100$, otrzymane z modelu Kurucza.



Rysunek 3.4: Fragment widma słonecznego w bardzo wysokiej zdolności rozdzielczej $R=100\,000$, otrzymanego z modelu Kurucza. Grubą linią nałożony jest fragment z poprzedniego rysunku w niskiej zdolności rozdzielczej.

efektywnych od 3 500 do 50 000 K. Udostępnione oprogramowanie pozwala na syntezę widma liniowego dla obliczonych modeli dla wybranego zakresu długości fali oraz zdolności rozdzielczej aż do 500 000. Jest to bardzo potężne narzędzie astrofizyczne, szeroko wykorzystywane i zasłużenie cenione.

Dla choćby pobieżnego zorientowania się w możliwościach modeli Kurucza pokazane są na rysunkach 3.3 i 3.4 przykłady dotyczące widma Słońca. Rysunek 3.3 pokazuje przebieg widma w bardzo małej zdolności rozdzielczej, $R = \lambda/\Delta\lambda = 100$. Jest to właściwie tzw. spektrofotometria zwana czasem SED (z angielskiego: spectral energy distribution). Na rysunku 3.4 pokazany jest niewielki fragment tego samego widma, ale w bardzo dużej zdolności rozdzielczej $R = 100\,000$. Widoczna jest szeroka linia absorpcyjna H jonu Ca II oraz gęszcz linii nakładających się na siebie i powodujących obniżenie kontinuum widoczne na rysunku 3.3. Takie obliczenia są bardzo przydatne przy identyfikacji struktur obserwowanych w widmach gwiazd.



Rysunek 3.5: Przykład dopasowania do obserwacji widma otrzymanego z modelu Kurucza. Linia ciągła przedstawia model, punkty – obserwacje gwiazdy δ Eridani.

Powszechne jest stosowanie widm syntetycznych modeli Kurucza do wyznaczania parametrów gwiazd. Zadanie polega na znalezieniu parametrów (temperatura efektywna, grawitacja powierzchniowa, turbulencja, metaliczność) modelu, którego widmo najlepiej pasuje do widma obserwowanego. Rysunek 3.5 pokazuje przykład takiej analizy. Wykres pochodzi z pracy Affer i in. [1], w której do wyznaczania parametrów wybranych gwiazd stosowano zarówno krzywe wzrostu, jak i dopasowywanie profili linii. Pokazany przykład dotyczy wyznaczania przyspieszenia grawitacyjnego na powierzchni gwiazdy poprzez dopasowanie skrzydeł linii Ca I.

3.4.4 Modele non-LTE

Trzeba od razu wyjaśnić, że o ile pojęcie lokalnej równowagi termodynamicznej (LTE) jest dobrze określone, to nie ma jednoznacznej definicji modelu non-LTE. W rozdziale 1.3.2 wymienione zostały założenia prowadzące do LTE. Liczne obliczenia publikowane jako „non-LTE” prowadzone są przy odejściu od jednego, lub kilku z tych założeń, ale z pewnością nie wszystkich. Trzeba dokładnie wczytać się w tekst publikacji, żeby poznać, o które konkretnie założenia chodzi.

Jak pamiętamy z rozdziału 2.1 zastanawianie się nad odstępstwami od LTE ma sens w najbardziej zewnętrznych warstwach atmosfery, w szczególności w chromosferach i wiatrach gwiazdowych. Dlatego też modele non-LTE

stosowane są do szczegółowej analizy linii widmowych, o których wiemy, że tam właśnie powstają.

Bardzo często stosowanym podejściem jest dopasowanie najpierw modelu atmosfery w przybliżeniu LTE (nierzadko jest to po prostu jeden z modeli Kurucza), a dopiero później zastosowanie równań równowagi szczegółowej do obliczeń obsadzeń poziomów i profili linii widmowych dla konkretnego jonu. Mowa jest wtedy o tak zwanym „ograniczonym non-LTE”, co ma znaczyć, że struktura atmosfery LTE pozostaje bez zmian, czyli obliczany stan danego jonu nie ma na nią wpływu.

Czytelnik może łatwo znaleźć prace źródłowe dotyczące wspomnianych powyżej zagadnień. Publikowane są analizy non-LTE atmosfer i porównywane z modelami LTE, dyskutowane są rozbieżności. Jeden z przykładów omawiany jest dalej w rozdziale 5.2.3. Z kolei w rozdziale 3.4.6 przedstawiona jest krytyczna dyskusja aktualnego stanu modelowania widma Słońca.

3.4.5 Częściowa redystrybucja

Interesujące są prace uwzględniające odstępstwa od założenia pełnej redystrybucji (rozdział 1.4.3). Za pełną redystrybucję odpowiedzialne są zderzenia wzbudzonego atomu ze swobodnymi elektronami. Przypomnijmy, że poziomy energetyczne atomu składają się z wielu podpoziomów o bardzo bliskich energiach. Gdyby zderzenia nie odgrywały roli w trakcie obsadzania poziomów, wówczas wzbudzony po absorpcji fotonu atom emitowałby foton z tego samego podpoziomu, na który zaszła absorpcja i mielibyśmy całkowitą koherencję. Jeśli jednak pomiędzy absorpcją a emisją dojdzie do elastycznego zderzenia ze swobodnym elektronem, wówczas w sposób przypadkowy zmieniana jest energia między wzbudzonymi podpoziomami i koherencja jest niszczona. Przy takim podejściu oczywistym jest, że głęboko w atmosferze, gdzie gaz jest gęsty i zderzenia częste, pełna redystrybucja jest dobrym przybliżeniem. Ale dla silnych linii rezonansowych formujących się w rozrzedzonych wysokich warstwach chromosferycznych (np. wodorowa linia Lyman α) jest to złe przybliżenie. Wprowadza się wówczas pojęcie „częściowej redystrybucji” oraz stopień niekoherencji określany parametrem Λ o wartości pomiędzy 0 a 1. Stopień niekoherencji jest to prawdopodobieństwo, że wzbudzony atom dozna zderzenia elastycznego zanim wyemituje foton. Zatem część Λ rozproszeń zajdzie przy współudziale zderzeń, a więc przy pełnej redystrybucji, a część $1 - \Lambda$ przy pełnej koherencji. Obliczenia kwantowo-mechaniczne pozwalają na oszacowanie wielkości Λ . Odpowiednie modele, które uwzględniają ową „częściową” redystrybucję, znakomicie poprawiają dopasowanie profili silnych linii rezonansowych.

3.4.6 Czego nadal nie wiemy o Słońcu

Robert Kurucz na podstawie wieloletniego doświadczenia w modelowaniu atmosfer gwiazdowych opracował krótki tekst podsumowujący naszą niewiedzę w tej dziedzinie. Różne wersje artykułu prezentowane były ostatnio na różnych konferencjach, wszystkie można znaleźć na stronie WWW Kurucza. Zapoznajmy się, na przykładzie Słońca, gwiazdy zdawało by się najlepiej znanej, z podstawowymi jego konkluzjami.

Nie rozumiemy konwekcji

W gwiazdach występuje konwekcja komórkowa, o dwóch podstawowych składnikach

1. powoli unoszący się, gorący, szeroki, rozbieżny przepływ, który zawraca i zlewa się z otoczeniem, by utworzyć
2. chłodny, gwałtownie opadający, kolumnowy przepływ, rozmywający się na dnie

Każdy jednowymiarowy model konwektywny, oparty na teorii średniej drogi mieszania, zakłada, że struktury konwektywne można uśredniać tak, że emitowane promieniowanie zależy tylko od jednowymiarowego przebiegu temperatury. Jednowymiarowy model atmosfery jest źródłem błędów systematycznych. Funkcja Plancka, czynnik Boltzmanna i równanie Sahy nie uśredniają się pomiędzy gorącymi i chłodnymi komórkami konwektywnymi. Każdy parametr mający silną wykładniczą zależność od temperatury będzie źle odwzorowany. Na przykład silna zależność od temperatury obsadzenia drugiego poziomu wodoru sprawia, że skrzydła linii serii Balmera formują się głównie w gorących komórkach konwektywnych. Jednowymiarowy model odwzorowujący skrzydła linii Balmera będzie miał zawyżoną temperaturę efektywną w stosunku do prawdziwej gwiazdy. Z kolei molekuły CO są bardziej obfite w chłodnych komórkach.

Pomijamy zmienność mikroturbulencji

W Słońcu można empirycznie wyznaczyć prędkości mikroturbulencji. Otrzymujemy zakres wartości od 0.5 km/s przy minimum temperaturowym do 1.8 km/s w najgłębszych obserwowanych warstwach. Prędkość mikroturbulencji powiększa szerokość linii widmowych i powoduje efekty podobne do zmian składu chemicznego. Jak narazie wszystkie modele, wynikające z nich strumienie, linie widmowe, itp. są obliczane ze stałą mikroturbulencją, co

proceeds to systematic errors between different line formation regions.

Nie rozumiemy linii widmowych

Many spectral features called „lines” are blends of many different atomic and molecular lines. Almost all atomic lines have complex hyperfine and isotopic structure and are asymmetric. Only when we understand the solar spectrum in detail, we will be able to study other stars, for which we have much poorer spectra.

Nie znamy rozkładu energetycznego promieniowania słonecznego

Measurements taken from the Earth’s surface are distorted by the telluric spectrum. We have satellite data, but NASA and ESA are not interested in such detailed measurements. In the solar spectrum, known as it is, some regions remain unknown. There is a need for a full solar spectrum, even from physicists studying comets and meteors. To meet this need, missing fragments of the observed spectrum must be filled in with calculations.

Nie wiemy, jak wyznaczać obfitości

One of the parameters of stars, galaxies, or other objects, is the iron abundance $[Fe]$. It is the logarithm of the ratio of iron in the object to the iron in the Sun. An interesting fact is that we do not know the solar iron abundance, and our estimates change from year to year. Kurucz noticed that, when he was a student, the iron abundance had changed by a factor of 10. In a well-known and often cited paper, Grevesse and Sauval [13] assumed a priori that the iron abundance in the Sun should be the same as in meteorites and in this way calibrated the method of determining chemical composition. Without this assumption, they would not have determined the solar abundances. It remains questionable whether the Sun has the same iron abundance as meteorites?

Considering many lines of an element instead of improving the analysis leads to systematic errors. In an ideal case, a weak spectral line should determine the abundance of the element. Strong lines are very sensitive to microturbulence and model details. Weak and unidentified blends can affect the abundance. There are systematic and random errors in the oscillator strengths gf .

Powszechnie obserwowane żelazo ma 4 izotopy, a niestety rozszczepienie izotopowe nie jest wyznaczone dla linii stosowanych do analizy obfitości. Jeśli przyjrzeć się dokładnie dostępnym liniom żelaza, okazuje się, że dla badań astrofizycznych pozostają w miarę bezpieczne tylko 3 linie Fe I oraz 1 linia Fe II.

Półowa linii widma Słońca pozostaje niezidentyfikowana

Taka jest prawda, a przy tym niektóre z danych atomowych stosowanych do dzisiaj pochodzą z lat 1930-tych. Tak więc każde nowe dane, jak np. więcej poziomów energetycznych, czy lepsze długości fali, mogą dotyczyć tysięcy struktur w widmie i zmieniać ich dotychczasową identyfikację.

Rozdział 4

Hydrodynamika otoczek

Realistyczne modele otoczek wokółgwiazdowych otrzymamy jedynie w oparciu o równania hydrodynamiki. W większości przypadków stosowane są równania niezależne od czasu i sformułowane w sferycznej symetrii. Podręczniki często ograniczają się do takiej postaci (np. Lamers i Cassinelli [17]). Zapoznajmy się jednak z bardziej ogólnymi zależnościami sformułowanymi w podręczniku Mihalasa [24], gdyż bywa to także przydatne.

4.1 Podstawowe pojęcia hydrodynamiczne

Rozpatrzmy najprostsze równania hydrodynamiki dla gazu doskonałego, bez lepkości, ściśliwego, całkowicie zjonizowanego. Zajmijmy się tylko jednym rodzajem cząstek o masie m . Wprowadźmy funkcję rozkładu prędkości taką, że

$$f d\vec{r} d\vec{v} \quad (4.1)$$

jest liczbą cząstek w elemencie objętości $(\vec{r}, \vec{r} + d\vec{r})$, z prędkościami z przedziału $(\vec{v}, \vec{v} + d\vec{v})$. Niech wektor prędkości \vec{v} ma składowe (v_1, v_2, v_3) . Na pole prędkości każdej cząstki składają się

- prędkość przepływu makroskopowego
- izotropowy mikroskalowy rozkład termiczny prędkości

Wyrażona przez funkcję f liczba cząstek w 1 cm^3 (gęstość liczbowa) wynosi

$$n(\vec{r}, t) = \int d\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) \quad (4.2)$$

Gęstość (masowa) gazu $[\text{g cm}^{-3}]$ wynosi

$$\varrho(\vec{r}, t) = m \cdot n(\vec{r}, t) \quad (4.3)$$

Średnia prędkość $\langle v_i \rangle$, czyli faktyczna prędkość przepływu gazu w kierunku „i”, wyraża się wzorem

$$n\langle v_i \rangle = \int d\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) \cdot v_i \quad (4.4)$$

Pełna prędkość w danej chwili jest sumą prędkości przepływu $\langle v_i \rangle$ i prędkości ruchów termicznych v'_i

$$v_i = \langle v_i \rangle + v'_i \quad (4.5)$$

Strumień masy przenoszony w danej chwili wynosi

$$m \cdot n(\vec{r}, t) \cdot \langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle = \varrho \langle \vec{v} \rangle \quad (4.6)$$

Można wprowadzić **tensor przenoszenia pędu**, czyli tempo przenoszenia składowej i pędu przez powierzchnię ustawioną prostopadle do kierunku j

$$\Pi_{ij}(\vec{r}, t) = m \int d\vec{v} f(\vec{r}, \vec{v}, t) v_i v_j \quad (4.7)$$

Wielkość ta jest przydatna przy formułowaniu równań hydrodynamiki. Rozpiszmy v_i oraz v_j na składowe przepływu $\langle v_i \rangle$ i ruchów termicznych v'_i . Skorzystajmy z faktu, że ruchy termiczne są izotropowe, czyli po uśrednieniu zerują się $\langle v'_i \rangle = 0$, a ich składowe w różnych kierunkach są nieskorelowane, czyli $\langle v'_i v'_j \rangle = \langle (v'_i)^2 \rangle \delta_{ij} = \frac{kT}{m} \delta_{ij}$. Otrzymamy

$$\Pi_{ij} = mn\langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + nkT\delta_{ij} = \varrho \langle v_i \rangle \langle v_j \rangle + p\delta_{ij} \quad (4.8)$$

4.2 Równania hydrodynamiki

Równania hydrodynamiki można formułować i rozwiązywać w dwóch podstawowych układach współrzędnych

- opis Eulera – w układzie stacjonarnym, z pochodnymi cząstkowymi $\partial/\partial t$
- opis Lagrange’a – w układzie współporuszającym się, z pochodnymi całkowitymi D/Dt

W przypadku przepływów nierelatywistycznych wybór jednego z dwóch opisów jest tylko kwestią wygody przy spisywaniu równań. Znany jest związek między obiema pochodnymi, który umożliwia przechodzenie z jednego z opisów do drugiego

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \quad (4.9)$$

Obecnie $d\tau$ oznaczać będzie element objętości w gazie, a dS element powierzchni i odpowiednie całkowania będą prowadzone po objętości lub powierzchni. Wektor prędkości \vec{v} opisuje przepływ gazu w rozumieniu wartości średniej $\langle \vec{v} \rangle$ z opisu powyżej, jego składowe oznaczamy przez v_i .

4.2.1 Równanie ciągłości

Jest to po prostu równanie zachowania masy, sformułowane w opisie Eulera w ten sposób, że zmiana masy zawartej w $d\tau$ zachodzi przez przepływ masy przez powierzchnię S zamykającą objętość $d\tau$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho d\tau = - \oint \rho \vec{v} dS = - \int \nabla \cdot (\rho \vec{v}) d\tau \quad (4.10)$$

Powyżej, w drugiej równości, wykorzystane zostało twierdzenie o dywergencji, co prowadzi ostatecznie do równości dwóch całek objętościowych, więc ich funkcje podcałkowe muszą być równe

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (4.11)$$

To samo w opisie Lagrange'a

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.12)$$

Dla przepływu sferycznie symetrycznego równanie ciągłości ma postać

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v) = 0 \quad (4.13)$$

W przypadku stacjonarnym otrzymujemy

$$4\pi r^2 \rho v = \text{const} = \dot{M} \quad (4.14)$$

4.2.2 Równanie pędu

Podobnie, jak poprzednio, zrównujemy zmianę pędu w elemencie $d\tau$ z wypływem pędu przez powierzchnię, ale dodając możliwość zmiany pędu przez działanie siły \vec{f} (przypadającej na jednostkę objętości). Także stosujemy twierdzenie o dywergencji

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int \rho \vec{v} d\tau \right) = - \oint \Pi \cdot dS + \int \vec{f} d\tau = \int (\vec{f} - \nabla \cdot \Pi) d\tau \quad (4.15)$$

Z równości funkcji podcałkowych otrzymujemy

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varrho \vec{v}) = -\nabla \cdot \Pi + \vec{f} \quad (4.16)$$

Podstawiając znaną wartość tensora pędu otrzymamy

$$\varrho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = -\nabla p + \vec{f} \quad (4.17)$$

A w układzie Lagrange'a

$$\varrho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{f} \quad (4.18)$$

Najczęściej stosowaną postać otrzymamy w sferycznej symetrii, z siłą grawitacji $f = -GM\varrho r^{-2}$

$$\varrho \frac{\partial v}{\partial t} + \varrho v \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{GM\varrho}{r^2} \quad (4.19)$$

4.2.3 Przykłady zastosowań

Dla ilustracji powyższych zależności przedyskutujmy zastosowanie równań ciągłości i pędu w dwóch prostych przypadkach.

Wiatr izotermiczny

Rozpatrzmy izotermiczny, sferyczny wypływ materii z gwiazdy. W przypadku stacjonarnym, gdy prędkość wiatru gwiazdowego w danym miejscu nie zmienia się z czasem, równanie pędu przekształcamy

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (4.20)$$

Dla gazu doskonałego zachodzi

$$p = R\varrho T / \mu \quad (4.21)$$

Przy stałej temperaturze możemy gradient ciśnienia zastąpić gradientem gęstości

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial p}{\partial r} = \left(\frac{RT}{\mu} \right) \frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial r} \quad (4.22)$$

Korzystając z równania ciągłości w przypadku stacjonarnym, można gradient gęstości zastąpić gradientem prędkości

$$\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \varrho}{\partial r} = -\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{r} \quad (4.23)$$

Wstawiamy powyższe do równania pędu i otrzymujemy równanie na prędkość

$$v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{RT}{\mu} \left(-\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{2}{r} \right) + \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (4.24)$$

Przekształcamy je do postaci

$$\frac{1}{v} \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\left(\frac{2a^2}{r} - \frac{GM}{r^2} \right)}{(v^2 - a^2)} \quad (4.25)$$

gdzie wprowadziliśmy tzw. izotermiczną prędkość dźwięku a

$$a^2 = \frac{RT}{\mu} \quad (4.26)$$

Przyjrzyjmy się bliżej temu równaniu. Wyrażenie na gradient prędkości ma postać ułamka, w którym zarówno licznik, jak i mianownik, mogą przyjąć wartość zero. Mianownik jest zerem, czyli równanie ma osobliwość, w punkcie $v(r) = a$, czyli tzw. punkcie dźwiękowym. Licznik równania ma wartość zero gdy

$$r = r_c = \frac{GM}{2a^2} \quad (4.27)$$

Jest to tzw. **odległość krytyczna** r_c , bądź odległość punktu krytycznego. Gradient prędkości w odległości krytycznej będzie zerem dla wszystkich wartości prędkości, z wyjątkiem prędkości krytycznej $v_c = a$. Analogicznie gradient prędkości w odległości, przy której prędkość v przekracza prędkość dźwięku $v = a$, będzie nieskończony, ze względu na zero w mianowniku, dla wszystkich r oprócz $r = r_c$. W rezultacie jedynym rozwiązaniem, w którym prędkość wiatru może narastać w całym zakresie r , jest to, w którym wiatr przekracza prędkość dźwięku dokładnie w punkcie krytycznym. Jest to tzw. **rozwiązanie transoniczne**, wiatr nim opisywany w pobliżu powierzchni gwiazdy wypływa z małą, poddźwiękową prędkością, a w dużych odległościach osiąga prędkość naddźwiękową. Pamiętajmy, że dyskutujemy rozwiązanie dla przypadku izotermicznego, w ogólnym przypadku prędkość w punkcie krytycznym nie musi być równa izotermicznej prędkości dźwięku.

Równanie wiatru izotermicznego można analizować graficznie, topologia rozwiązań jest często omawiana w podręcznikach. Rozwiązanie transoniczne zostało wprowadzone przez Parkera do opisu wiatru słonecznego, gorąca, izotermiczna korona musi doznawać transonicznej ekspansji do ośrodka międzygwiazdowego.

Omawiane rozwiązanie przewiduje wzrost prędkości bez ograniczeń. Jest to konsekwencją przyjętego założenia o izotermiczności – w dużych odległościach ekspansja musi prowadzić do ochłodzenia gazu, więc wymuszenie

stałej temperatury wprowadza sztuczne źródło energii i w konsekwencji rozpędzanie wiatru w nieskończoność.

Pokazaliśmy, że istnieje tylko jedno rozwiązanie, które zaczyna się wypływem poddźwiękowym, a kończy naddźwiękowym. Takie rozwiązanie istnieje dla tylko jednej określonej wartości prędkości u podstawy wiatru $v_0(\text{crit})$, czyli izotermiczna otoczka o gęstości ϱ_0 u podstawy może wyprodukować transoniczny wiatr dla jednego określonego tempa utraty masy

$$\dot{M} = 4 \pi r_0^2 \varrho_0 v_0(\text{crit}) \quad (4.28)$$

Fale akustyczne

Rozpatrzmy sytuację, kiedy ściśliwy gaz poddajemy małym impulsowym zaburzeniom – ściskaniu i rozrzedzaniu. Wytwarzają się wówczas i rozchodzą fale. Oznaczmy wartości w stanie równowagi, czyli niezmiennie w czasie, przez ϱ_0 i p_0 , a w stanie zaburzonym

$$\varrho = \varrho_0 + \varrho_1 \quad p = p_0 + p_1 \quad (4.29)$$

przy czym

$$\varrho_1 \ll \varrho_0 \quad p_1 \ll p_0 \quad (4.30)$$

Oczywiście musimy teraz uwzględnić zależności czasowe. Dla uproszczenia ograniczmy się jednak do przypadku jednowymiarowego i operator ∇ zastąpimy pochodną $\partial/\partial x$. Dodatkowo przyjmijmy, że prędkość v rozchodzenia się zaburzenia jest niewielka, co sprawia, że $\varrho_1 v \ll 1$. Z równania ciągłości zostanie

$$\frac{\partial \varrho_1}{\partial t} + \varrho_0 \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (4.31)$$

Z równania pędu, przy zewnętrznej sile $\vec{f} = 0$, zostanie

$$\varrho_0 \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (4.32)$$

W gazie doskonałym, bez lepkości i przewodnictwa, nie ma wymiany ciepła między jego elementami – proces jest adiabatyczny. Zachowana jest entropia, więc możemy wzór na pochodną zaburzenia ciśnienia przekształcić ($|_S$ oznacza pochodną przy stałej entropii)

$$\frac{\partial p_1}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial \varrho} \Big|_S \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} = a^2 \frac{\partial \varrho_1}{\partial x} \quad (4.33)$$

Z układu dwóch równań otrzymamy równanie

$$\frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \varrho_1}{\partial x^2} = 0 \quad (4.34)$$

Jest to równanie dla fal akustycznych, rozchodzących się w ośrodku z prędkością a . Powyższe równania definiują prędkość dźwięku a , którą możemy łatwo obliczyć w dwóch skrajnych przypadkach. W przypadku procesów adiabatycznych w gazie doskonałym zachodzi

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\gamma \quad (4.35)$$

i wzór na adiabatyczną prędkość dźwięku ma postać

$$a = \sqrt{\gamma p / \varrho} = \sqrt{\frac{\gamma R T}{\mu}} \quad (4.36)$$

a gdy proces jest izotermiczny zachodzi

$$p = \frac{\varrho k T_0}{\mu m_H} \quad (4.37)$$

i otrzymujemy znaną już izotermiczną prędkość dźwięku

$$a = \sqrt{\frac{R T_0}{\mu}} \quad (4.38)$$

4.2.4 Równanie energii

Zasadę zachowania energii opisuje I zasada termodynamiki, która zrównuje zmianę energii wewnętrznej ϵ gazu (energia ruchów mikroskalowych oraz wewnętrzne wzbudzenia cząstek) z ilością ciepła Q dodanego, pomniejszonego o pracę W wykonaną przez gaz przy zmianie objętości

$$d\epsilon = dQ - dW \quad (4.39)$$

To samo, ale zapisane dla energii wewnętrznej na jednostkę masy

$$de = dq - pd(1/\varrho) \quad (4.40)$$

W prostszym przypadku, gdy wymiana ciepła odbywa się wyłącznie przez przewodnictwo, strumień przewodzony zapisujemy jako

$$\vec{q}_c = -\kappa \nabla T \quad (4.41)$$

Przypadające na jednostkę masy tempo zmiany ciepła wyraża się przez dywergencję strumienia

$$-\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \vec{q}_c \quad (4.42)$$

W układzie Lagrange'a, czyli tym związanym z gazem, I zasadę termodynamiki zapiszemy

$$\frac{De}{Dt} + p \frac{D(1/\varrho)}{Dt} = -\frac{1}{\varrho} \nabla \cdot \vec{q}_c \quad (4.43)$$

Korzystając z równania ciągłości w postaci

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (4.44)$$

otrzymamy

$$\varrho \frac{De}{Dt} + p \nabla \cdot \vec{v} = -\nabla \cdot \vec{q}_c \quad (4.45)$$

Wprowadzone wcześniej równanie pędu pozwala na sformułowanie równania energii kinetycznej. Będziemy chcieli je połączyć z równaniem energii cieplnej. Przypomnijmy

$$\varrho \frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla p + \vec{f} \quad (4.46)$$

po wymnożeniu stronami przez \vec{v} otrzymamy

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 \right) + (\vec{v} \cdot \nabla) p = \vec{v} \cdot \vec{f} \quad (4.47)$$

Dodajmy teraz oba równania energii

$$\varrho \frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{2} v^2 + e \right) + \nabla \cdot (p\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{f} - \nabla \cdot \vec{q}_c \quad (4.48)$$

Po przejściu do układu Eulera i odrobinie algebry otrzymujemy jedno równanie energii

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho e \right) + \nabla \cdot \left[\left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho e + p \right) \vec{v} + \vec{q}_c \right] = \vec{v} \cdot \vec{f} \quad (4.49)$$

W przypadku stacjonarnym, w symetrii sferycznej, z przewodnictwem cieplnym jako jedynym procesem wymiany ciepła i polem grawitacyjnym jako jedynym źródłem siły zewnętrznej

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[r^2 v \left(\frac{1}{2} \varrho v^2 + \varrho e + p \right) - r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} \right] + r^2 \varrho v \frac{GM}{r^2} = 0 \quad (4.50)$$

Można wprowadzić tzw. entalpię własną

$$h = e + p/\varrho \quad (4.51)$$

Ponadto zauważmy, że $r^2 \varrho v$ jest wielkością stałą, bo z równania ciągłości wynika

$$4\pi r^2 \varrho v = \dot{M} \quad (4.52)$$

więc powyższe równanie energii można całkować

$$4\pi r^2 \varrho v \left[\frac{1}{2} v^2 + h - \frac{GM}{r} \right] - 4\pi r^2 \kappa \frac{\partial T}{\partial r} = \text{const} \quad (4.53)$$

Równanie to pokazuje, że całkowity strumień energii przez sferyczną powierzchnię, złożony ze strumienia energii kinetycznej, entalpii gazu, energii potencjalnej i przewodnictwa cieplnego, jest wielkością stałą.

Podsumowanie

Poznaliśmy podstawowe równania opisujące przepływ gazu doskonałego: równanie ciągłości, równanie pędu oraz równanie energii. Po uzupełnieniu ich o równanie stanu i równanie energii wewnętrznej otrzymujemy układ równań, który możemy rozwiązywać. Trzeba oczywiście jeszcze określić warunki początkowe i warunki brzegowe. Jest to układ równań nieliniowy i rozwiązania analityczne istnieją tylko w pewnych bardzo uproszczonych sytuacjach. W ogólności trzeba posłużyć się metodami numerycznymi.

4.3 Bilans energii dla wiatrów gwiazdowych

Omawiane wcześniej równania można sformułować ogólniej, na przypadki obejmujące dodatkową (oprócz grawitacyjnej) siłę powodującą zmianę pędu gazu, oraz dodatkowe (oprócz przewodzonego) źródło ciepła. Zapoznajmy się z analizą takich równań podaną w pracy Holzera [16]. Nie będziemy już wnikać w szczegóły rachunkowe, zastanowimy się nad naturą różnych przepływów.

Oznaczmy bardzo ogólnie dla płynącego gazu przyrost pędu na jednostkę objętości przez ϱD , a ciepła przez Q . W zależności od procesów, które uwzględnimy przy dodawaniu pędu D czy ciepła Q , będziemy musieli uzupełnić układ równań o równania Maxwella, równania przepływu promieniowania, równania równowagi statystycznej, itp. Równanie energii dla wiatru gwiazdowego, po wycalkowaniu od podstawy wiatru do bieżącej wysokości, przyjmie postać

$$F(r) = 4\pi r^2 \varrho v \left[\frac{1}{2} v^2 + h - \frac{GM_*}{r} \right] + 4\pi r^2 q_c = F_0 + F_A \quad (4.54)$$

gdzie indeks 0 dotyczy poziomu odniesienia r_0 , czyli ustalonej podstawy wiatru. F_0 jest strumieniem energii dostarczoną do podstawy wiatru i niesioną z wiatrem. Z kolei wielkość F_A jest energią dodaną do wiatru w trakcie jego ekspansji, wynikającą z dodawania pędu i dodawania ciepła.

$$F_A = \int_{r_0}^r dr' \left[-\dot{M}_* D + 4\pi r'^2 Q \right] \quad (4.55)$$

Określone powyżej F jest strumieniem energii wiatru składającym się z energii przepływu, entalpii, grawitacyjnej energii potencjalnej i przewodnictwa cieplnego. Energia dodana do wiatru pochodzi zarówno z dodawania pędu jak i ciepła. Warto pamiętać o rozróżnianiu tych procesów. Dodawanie pędu pochodzi z przyłożonej siły działającej na gaz. Dodawanie ciepła to powiększanie energii wewnętrznej gazu, zazwyczaj przez dysypację jakiegoś strumienia energii, jak na przykład promieniowania czy ruchu falowego.

Wychodząc z wzoru 4.54 można określić energię na jednostkę masy wiatru gwiazdowego jako

$$E = \frac{1}{2}v^2 + \frac{\gamma}{\gamma - 1}v_t^2 - \frac{1}{2}v_g^2 + \frac{1}{2}v_q^2 \quad (4.56)$$

W uzupełnieniu do „zwykłej” prękości przepływu v wprowadzone zostały dodatkowe tzw. charakterystyczne prędkości, które są powiązane z energią wewnętrzną (v_t), grawitacyjną (v_g) i przewodnictwem cieplnym (v_q). Konkretnie ich definicje czytelnik może łatwo wyprowadzić. Pomagają one w opisanu i zrozumieniu pewnych zależności. Na przykład dla wiatrów silnie związanych grawitacyjnie przy podstawie atmosfery z równania na E zostaje

$$E_0 \approx -\frac{1}{2}v_{g0}^2 + \frac{1}{2}v_{q0}^2 \quad (4.57)$$

a w dużych odległościach, gdzie mamy tylko swobodny wypływ

$$E_\infty \approx \frac{1}{2}v_\infty^2 \quad (4.58)$$

Różnica między E_∞ a E_0 to energia (na jednostkę masy) którą trzeba dodać do atmosfery powyżej jej podstawy, aby rozpędzić wiatr. Energia ta musi być wystarczająca do

- wyniesienia materii z pola grawitacyjnego gwiazdy
- rozpędzenia materii do prędkości asymptotycznej
- dostarczenia energii wypromieniowanej na zewnątrz przez wiatr

Pomińmy chwilowo energię wypromieniowywaną przez wiatr, która i tak najczęściej jest mała. W masywnych wiatrach gwiazd wczesnych typów widmowych zachodzi $v_\infty^2 \gg v_{g0}^2$ i większość energii rozpędzającej przeznaczana jest na przyspieszanie wiatru do jego prędkości asymptotycznej. Dla wiatrów podobnych do słonecznego $v_\infty^2 \approx v_{g0}^2$, czyli energie potrzebne do wyniesienia wiatru z pola grawitacyjnego i do rozpędzenia go są porównywalne. Z kolei masywne wiatry gwiazd późnych typów charakteryzują się zależnością $v_\infty^2 \ll v_{g0}^2$ i niemal cała energia napędzająca przeznaczana jest na wyniesienie materii z pola grawitacyjnego gwiazdy.

Wcześniejsze równania pozwalają oszacować gęstość strumienia energii opuszczającego podstawę atmosfery, potrzebnego do rozpędzenia wiatru

$$\frac{F_{d0}}{4\pi r_0^2} \approx 3.3 \cdot 10^3 \left(\frac{-\dot{M}}{10^{-7}} \right) \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \left(\frac{400 R_\odot}{R_*} \right)^3 \left(1 + \frac{v_\infty^2}{v_{g0}^2} \right) \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \quad (4.59)$$

Sprawdźmy, co otrzymamy z tej formuły dla kilku rodzajów wiatrów

- Dla wiatru słonecznego: $\dot{M} \approx 2 \cdot 10^{-14} M_\odot/\text{rok}$

$$\frac{F_{d0}}{4\pi r_0^2} \approx 10^5$$

- Dla nadolbrzyma K5: $M_* \approx 16 M_\odot$, $R \approx 400 R_\odot$, $\dot{M} \approx 10^{-7}$

$$\frac{F_{d0}}{4\pi r_0^2} \approx 6 \cdot 10^4$$

- Dla Miry: $M_* \approx 1 M_\odot$, $R \approx 400 R_\odot$, $\dot{M} \approx 2 \cdot 10^{-6}$

$$\frac{F_{d0}}{4\pi r_0^2} \approx 5 \cdot 10^4$$

Zauważmy, że otrzymaliśmy bardzo podobne strumienie energii u podstawy wiatru przy bardzo różnych gwiazdach i tempach utraty masy.

Jak to rozumieć, że taki sam strumień rozpędza zarówno niewielki wiatr słoneczny, jak i intensywny wiatr Miry? Wynika to z faktu, że promienie gwiazd masywnych są tak duże, że bariera potencjału grawitacyjnego jest w nich znacznie mniejsza niż na Słońcu i taki sam strumień łatwo spowoduje dużo większą utratę masy. Ponadto większy promień oznacza większą powierzchnię, przez którą strumień energii jest transportowany, znacznie większą, niż powierzchnia Słońca. Czyli różnorodność temp wypływu materii jest raczej powiązana z rozmiarami atmosfer niż z wypływającym z nich strumieniem energii.

4.4 Rodzaje wiatrów gwiazdowych

W zależności od mechanizmu dominującego w przekazywaniu energii do wiatru wyróżniamy

- wiatr napędzany termicznie – kiedy gradient ciśnienia termicznego jest jedyną siłą skierowaną na zewnątrz.
- wiatr napędzany falami – przede wszystkim rozpatrywane są fale magneto hydrodynamiczne mogące przekazywać pęd wiatrowi
- wiatr napędzany promieniście – kiedy strumień ultrafioletowy gwiazdy jest absorbowany przez liczne silne linie rezonansowe
- wiatr napędzany falami uderzeniowymi – pulsacje gwiazdy mogą rozwijać się w fale uderzeniowe rozchodzące się na zewnątrz

Poniżej bardzo pobieżnie omówimy przypadki, gdzie możemy wyżej wymienione rodzaje wiatrów spotkać. W następnym rozdziale skoncentrujemy się na rozpędzaniu promieniowaniem, zgodnie z wybraną tematyką książki.

Wiatr słoneczny

Atmosfera Słońca jest silnie związana grawitacyjnie u podstawy korony, zatem strumień dostarczający potrzebnej wiatrowi energii musi być transportowany innym, niż adwekcja mechanizmem. Przewodnictwem trudno wyjaśnić wzrost temperatury na zewnątrz. Musi działać jakiś mechaniczny transport energii, głównym kandydatem są fale Alfvena. Wiatr słoneczny wydaje się być rozpędzany termicznie z modyfikacjami falowymi: gradient ciśnienia termicznego wynosi wiatr z pola grawitacyjnego a fale pomagają go przyspieszać do granicznych prędkości, ogrzewając i dodając pędu.

Rozpędzane termicznie, masywne wiatry gwiazd późnych typów

Gwiazdy późnych typów widmowych są zbyt chłodne, by przewodnictwo cieplne mogło odgrywać znaczącą rolę. Ich atmosfery są także zbyt chłodne, by gradient ciśnienia termicznego mógł być jedynym czynnikiem napędzającym wiatr. Spodziewamy się zatem jakiegoś strumienia energii mechanicznej, który oprócz ogrzewania przekazuje pęd.

Testując możliwość wiatru rozpędzanego termicznie można tworzyć modele odwzorowujące obserwowane tempa utraty masy. Jednak temperatury takich modeli są na tyle wysokie, że ich emisja termiczna byłaby obserwowana, a nie jest – więc nie jest to odpowiedni mechanizm.

Wiatry rozpędzane falami

Niepowodzenia teorii wiatrów termicznych kierują uwagę na fale mechaniczne. Mogą to być fale ściśliwe (akustyczne lub magneto-akustyczne) lub nieściśliwe (fale Alfvena). Fale ściśliwe bardzo szybko narastają do fal uderzeniowych i rozpraszają się u podstawy atmosfery. Fale nieściśliwe nie są tłumione tak łatwo i mogą pracować nad rozciąganiem atmosfery gwiazdowej w dużych odległościach, napędzając całkiem spory wiatr. Teoria podpowiada wzory na przekazywanie pędu i ciepła przez fale Alfvena i tworzone są modele uwzględniające różne przybliżenia. Okazuje się, że fale Alfvena nie tłumione prowadzą do nazbyt wysokich prędkości ekspansji. Problem znalezienia odpowiednich procesów tłumienia pozostaje aktualny. W ostatnim czasie podejmowane są próby dołączenia do modeli ziaren pyłu, które miałyby zapewniać właściwe tłumienie fal Alfvena oraz dodatkowe rozpędzanie wiatru przez absorpcję ciśnienia promieniowania.

Wiatry napędzane falami uderzeniowymi

Wiele gwiazd otoczonych pyłem wykazuje obecność regularnych pulsacji. Takie pulsacje mogą wytwarzać fale uderzeniowe o dużej amplitudzie, deponujące w atmosferze zarówno ciepło jak i pęd.

Fala uderzeniowa przechodząc przez element gazu ogrzewa go i przyspiesza. Po przejściu fali następuje chłodzenie w szerokim rozrzedzonym obszarze. Przejście fali uderzeniowej można rozpatrywać adiabatycznie lub izotermicznie (gdy chłodzenie promieniste jest bardzo efektywne). Modele wiatrów dla obu skrajnych przypadków dają wyniki drastycznie różne i o rzędy wielkości niezgodne z obserwacjami.

Wiatry napędzane promieniowaniem

Dla gorących gwiazd dominuje ultrafioletowa część strumienia promieniowania. Atmosfera zawiera wiele silnych linii rezonansowych sprzęgających ją wydatnie z polem promieniowania.

Z kolei dla chłodnych gwiazd rozkład promieniowania ma maksimum w czerwonej części widma lub w bliskiej podczerwieni. Oddziaływać efektywnie z takim promieniowaniem mogą molekuly i pył, które z kolei poprzez lepkość sprzężone są z gazem. Jeśli pył tworzy się daleko od powierzchni gwiazdy (są przesłanki, że tak właśnie jest), to modelowe tempa utraty masy są zbyt małe. Ponadto modele produkują zbyt duże prędkości wypływu.

Rozdział 5

Wiatry rozpędzane promieniowaniem

Mamy do czynienia z dwoma podstawowymi rodzajami wiatrów napędzanych promieniowaniem

- dla gwiazd wczesnych typów widmowych – wiatry rozpędzane absorpcją i rozpraszaniem przez linie widmowe, głównie zakresu UV, efekt Dopplera odgrywa istotną rolę, prędkości graniczne wynoszą ponad 1000 km/s
- dla gwiazd późnych typów widmowych – wiatry napędzane kontinuum oddziałującym z ziarnami pyłu, przesunięcie ku czerwieni jest nieistotne, prędkości graniczne od 10 do 30 km/s

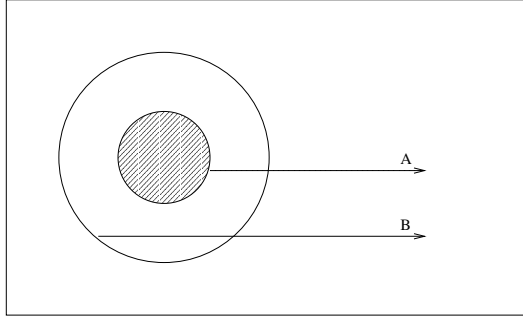
W niniejszym rozdziale omówimy teorie dotyczące obu rodzajów wiatrów oraz podamy aktualne przykłady zastosowań.

5.1 Wiatry rozpędzane liniami widmowymi

5.1.1 Najprostszy model gwiazdy z otoczką

Rozpatrzmy najprostszy podręcznikowy model gwiazdy, w której atmosfera jest na tyle rozległa, że jej grubość jest porównywalna z promieniem gwiazdy. Taki model (rysunek 5.1) składa się z

- nieprzezroczystej sfery emitującej jak ciało doskonale czarne o temperaturze T_c
- otoczonej sferyczną warstwą o temperaturze T_s , przy czym warstwa ta absorbuje jedynie w wąskiej linii widmowej



Rysunek 5.1: Uproszczony model gwiazdy z otoczką. Nieprzezroczysta sfera o temperaturze T_c otoczona jest warstwą o temperaturze T_s absorbującą jedynie w linii widmowej i przezroczystą poza tą linią. Na obiekt spoglądamy wzdłuż dwóch linii widzenia A i B.

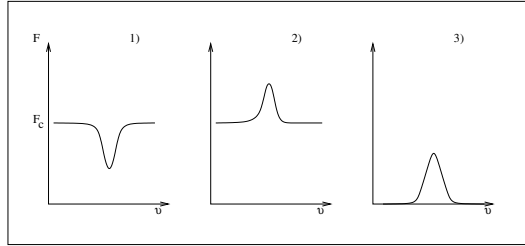
Przedyskutujmy, co zaobserwujemy patrząc na nasz obiekt wzdłuż dwóch linii

- przechodzącej przez środkową sferę (A)
- omijającej ją (B)

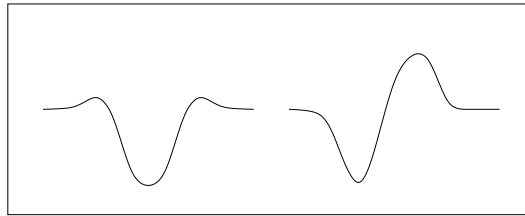
Rozważmy przy tym dwa przypadki wzajemnych relacji obu temperatur: $T_s < T_c$ i $T_s > T_c$, oraz dwie częstotliwości: w środku linii widmowej ν_0 i daleko od środka ν_1 . Na częstotliwości ν_0 środka linii widmowej otoczka jest nieprzezroczysta, więc zgodnie z rozważaniami z rozdziału 2.3 jako natężenie I_ν będziemy obserwowali funkcję źródłową S odpowiadającą temperaturze otoczki $S = B_\nu(T_s)$. Na częstotliwości ν_1 otoczka jest przezroczysta dla promieniowania i albo zobaczymy tarczę gwiazdy $S = B_\nu(T_c)$ albo nic. Na rysunku 5.2 przedstawione są przypadki

1. linia A oraz $T_s < T_c$: zaobserwujemy na częstotliwości ν_0 linię absorpcyjną pochodzącą od otoczki, leżącą na tle kontinuum $B_\nu(T_c)$, pochodzącego z centralnej sfery
2. linia A ale $T_s > T_c$: zaobserwujemy linię emisyjną ν_0 na tle kontinuum
3. linia B: zawsze linia emisyjna ν_0 , a poza nią natężenie jest zerowe

Jeśli obserwujemy obiekt z daleka i nie widzimy tarczy gwiazdy, to linie: emisyjna (z boków, linia B) i absorpcyjna (z centrum, linia A), wypełniają się nawzajem. W zależności od szczegółów ich kształtów możemy mieć w rezultacie dominację absorpcji lub emisji na centralnej częstotliwości ν_0 , możemy także obserwować emisyjne bądź absorpcyjne skrzydła.



Rysunek 5.2: Linie widmowe gwiazdy z otoczką. Rysunki odpowiadają omówionym w tekście przypadkom 1–3. F_c to strumień w kontinuum, wynoszący w naszym przypadku $B_\nu(T_c)$.



Rysunek 5.3: Przykłady profili otoczkowych powstałych z superpozycji linii absorpcyjnej i emisji otoczkowej. Z lewej strony przykład otoczki stacjonarnej, z prawej – profil typu P-Cygni otoczki ekspandującej.

A jeśli otoczka gwiazdowa ekspanduje, wówczas profil absorpcyjny jest przesunięty w stosunku do emisyjnego w stronę fal krótszych i rezultatem jest profil typu P-Cygni. Oczywiście przesunięcie to będzie tym większe, im większa będzie prędkość ekspansji otoczki. Schematyczne przykłady omawianych profili pokazane są na rysunku 5.3. Rzeczywiste kształty linii widmowych możemy otrzymać w wyniku rozwiązywania równania przepływu promieniowania przez otoczkę o zadanym rozkładzie gęstości i prędkości ekspansji.

5.1.2 Przepływ promieniowania w ekspandujących atmosferach

Teorię przepływu promieniowania można w prosty sposób uogólnić na przypadek ekspandujących atmosfer. Najistotniejszym zjawiskiem, które trzeba uwzględnić, jest efekt Dopplera powodujący, że profil absorpcyjny ϕ_ν staje się zależny od zmiennej kątowej μ . Przypomnijmy profil linii widmowej po-

szerzanej termicznie (rozdział 1.4.1)

$$\phi_\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2} \quad (5.1)$$

gdzie wprowadzona została tzw. bezwymiarowa częstość x

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_{\text{Dopp}}} \quad (5.2)$$

przy poszerzeniu dopplerowskim $\Delta\nu_{\text{Dopp}}$ zależnym od średniej prędkości ruchów termicznych v_{th}

$$\Delta\nu_{\text{Dopp}} = \frac{\nu_0 v_{\text{th}}}{c} \quad (5.3)$$

W ośrodku ekspandującym prędkość ekspansji wyraża się zazwyczaj w jednostkach prędkości dopplerowskiej v/v_{th} . Wówczas obserwowany profil trzeba opisać zależnością

$$\phi\left(x - \mu \frac{v}{v_{\text{th}}}\right) \quad (5.4)$$

gdzie μ jest kosinusem kąta między kierunkiem wektora prędkości w danym miejscu a kierunkiem do obserwatora. Wzór ten opisuje Dopplerowskie przesunięcie częstości w przybliżeniu nierelatywistycznym, łatwo rozpoznajemy sytuację, kiedy efekt ten jest zerowy (gdy ruch materii odbywa się prostopadle do kierunku patrzenia), a kiedy maksymalny (gdy ruch odbywa się do lub od obserwatora).

W rozwiązywaniu numerycznym powyższych problemów wydajne okazały się algorytmy oparte na metodzie Feautrier. Zwykle całkowanie równania przepływu z jednym warunkiem brzegowym może dać narastający błąd. Metoda Feautrier przekształca to równanie w równanie drugiego rzędu, które musi mieć dwa warunki brzegowe, zatem kontrolujemy rozwiązanie z dwóch stron.

Powszechne też są metody oparte na przybliżeniu Soboleva, zasadnym w przypadku dużych gradientów prędkości.

5.1.3 Przybliżenie Soboleva

Przyjmijmy, że prędkość wiatru wzrasta monotonicznie. Wysłany z fotosfery foton $h\nu_p$ może zostać zaabsorbowany przez linię widmową o częstości centralnej ν_0 jakiegoś jonu, jeśli jon ma prędkość taką, że jej składowa wzdłuż promienia światła przesuwają dopplerowsko częstość ν_p w przedział

$$\nu_0 \pm 1.5\Delta\nu_{\text{Dopp}} \quad (5.5)$$

w układzie związanym z jonem. Takie miejsce w wietrze nazywamy regionem oddziaływania linii. Obszar oddziaływania linii jest niezbyt rozległy, znaczne uproszczenie problemu uzyskamy zakładając, że jest on infinitezymalnie wąski. W konsekwencji funkcja profilu absorpcyjnego ϕ może być przybliżana funkcją deltą Diraca. W takim przybliżeniu region oddziaływania redukuje się do punktu wzdłuż drogi fotonu.

Obliczenie przyspieszania gazu poprzez absorpcję promieniowania wymaga rozwiązywania równania przepływu. Przybliżenie Soboleva upraszcza problem. Fotony oddziałują z gazem w jednym punkcie r_s , co oznacza, że po drodze do tego punktu nie oddziaływały z wiatrem. Strumień rozpędzający zależy jedynie od natężenia emitowanego w fotosferze i lokanych warunków w r_s .

Założmy, że gwiazda promieniuje jak jednorodny dysk bez pociemnienia brzegowego, z natężeniem I_ν^* niezależnym od kąta. Rozpatrzmy przypadek, kiedy wiązka promieniowania opuszcza powierzchnię gwiazdy pod pewnym kątem do kierunku radialnego. Im bardziej to promieniowanie będzie oddalało się od gwiazdy, tym kąt między wiązką a kierunkiem radialnym będzie mniejszy. Umówmy się, że w odległości r kąt ten wynosi μ . Po osiągnięciu punktu r w wietrze promieniowanie I_ν^* ulegnie osłabieniu

$$I_{\nu_p}(\mu) = I_{\nu_p}^* e^{-\tau_{\nu_p}(\mu)} \quad (5.6)$$

po pokonaniu głębokości optycznej

$$\tau_{\nu_p}(\mu) = \int_0^r \kappa_{\nu_p} dl = \tau_{\nu_0} \int_{\Delta\nu(\text{phot})}^{\Delta\nu(r)} \phi(\Delta\nu) d\Delta\nu \quad (5.7)$$

Całkowanie przebiega po drodze l fotonów od fotosfery (phot) do punktu r w wietrze, czemu odpowiada zmiana przesunięcia dopplerowskiego od $\Delta\nu(\text{phot})$ do $\Delta\nu(r)$. Występującą we wzorze całkę oznaczmy

$$\Phi(\Delta\nu_\mu) = \int_{\Delta\nu(\text{phot})}^{\Delta\nu(r)} \phi(\Delta\nu) d\Delta\nu \quad (5.8)$$

przy przesunięciu częstości $\Delta\nu_\mu$ zależącym od kąta μ w następujący sposób

$$\Delta\nu_\mu = \nu_p - \nu_0 \left(1 + \frac{\mu v(r)}{c} \right) \quad (5.9)$$

Funkcja Φ jest całką profilu absorpcyjnego ϕ linii widmowej o częstości centralnej ν_0 , po pewnym przedziale częstości. W przedziale tym może znaleźć się cały profil ϕ , tylko jego część, lub przedział może przypaść wogóle poza

profilem. Ponieważ funkcja profilu ϕ jest unormowana, funkcja Φ jest monotonicznie rosnąca i zachodzi

$$\Phi(-\infty) = 0 \quad \Phi(+\infty) = 1 \quad (5.10)$$

Po podstawieniu do wcześniejszego wzoru otrzymamy

$$I_{\nu_p}(\mu) = I_{\nu_0}^* e^{-\tau_{\nu_0} \Phi(\Delta\nu_\mu)} \quad (5.11)$$

Dalej obliczamy średnie natężenie promieniowania całkując $I_{\nu_p}(\mu)$ po kącie μ , z którego dociera promieniowanie (od μ_* do 1) i po pełnym zakresie częstotliwości. Po pewnej ilości przekształceń, m.in. zmieniając zmienną całkowania $\phi(\Delta\nu_\mu) d\Delta\nu_\mu = d\Phi(\Delta\nu_\mu)$, otrzymamy

$$\bar{J}(r) = \beta_c(r) I_{\nu_0}^* \quad (5.12)$$

gdzie wprowadziliśmy **prawdopodobieństwo penetracji** w punkcie r

$$\beta_c(r) = \frac{1}{2} \int_{\mu_*}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu \quad (5.13)$$

Prawdopodobieństwo penetracji β , wyrażane przez stosunek $\bar{J}(r)/I_{\nu_0}^*$, opisuje ilość promieniowania fotosferycznego, które osiąga punkt r .

Jeśli głębokość optyczna Soboleva τ_{ν_0} w punkcie r jest bardzo duża, to prawdopodobieństwo penetracji zbliża się do zera. Jeśli τ_{ν_0} jest bardzo małe

$$\beta_c \approx (1 - \mu_*)/2 \quad (5.14)$$

Analogicznie wprowadza się prawdopodobieństwo ucieczki dla fotonów, które opuszczają rejon Soboleva w pobliżu punktu r . Tym razem całkowanie przebiega po wszystkich kątach

$$\beta(r) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu = \int_0^1 \frac{1 - e^{-\tau_{\nu_0}}}{\tau_{\nu_0}} d\mu \quad (5.15)$$

Podstawowym problemem modeli opartych o przybliżenie Soboleva jest obliczenie prawdopodobieństwa β . Kiedy już je obliczymy, wówczas wyznaczamy średnie natężenie \bar{J} w odległości r bez właściwego rozwiązywania równania przepływu. Następnie możemy

- obliczać siłę promieniowania na gram gazu równą zaabsorbowanemu pędowi na sekundę, która z kolei jest równa radialnej składowej natężenia pomnożonej przez współczynnik absorpcji i podzielonej przez prędkość światła c

- obliczać przyspieszenie radialne g_{rad} powodowane absorpcją liniową
- uwzględniać jednocześnie wiele linii widmowych
- wstawiać wyznaczone g_{rad} do równań hydrodynamiki
- poprawiać otrzymane rozwiązania na efekt niezerowych rozmiarów gwiazdy
- uwzględniać wielokrotne rozpraszanie jednego fotonu
- uwzględniać efekt „szklarniowy” (ang. wind blanketing), kiedy rozpraszane w wietrze promieniowanie powraca na gwiazdę i zmienia jej atmosferę
- uwzględniać rotację gwiazdy
- itp. itd.

Szczegółowy przegląd powyższych zagadnień znaleźć można w książce Lamersa i Cassinelli’ego [17]. Nie istnieje jedna standardowa wersja metody Soboleva, jej zastosowania przez poszczególnych autorów różnią się od siebie. Różnice dotyczą zarówno wprowadzonych uproszczeń, jak i wzbogacenia o procesy, jak np. te wymienione powyżej, mające przybliżyć model do rzeczywistości.

Tempa utraty masy przewidywane przez uproszczoną teorię są mniejsze niż obserwowane, a prędkości graniczne większe niż obserwowane. Bardziej złożone obliczenia z uwzględnieniem przybliżenia Soboleva w układzie współporuszającym się z wiatrem dają wyniki zbliżone do obserwowanych dla nadolbrzymów typu A. Uwzględnienie wielokrotnego rozpraszania jest ważne w modelach wiatrów gwiazd WR.

5.1.4 Rozpędzanie wiatru liniami

Mechanizm ten dotyczy wiatrów jasnych gorących gwiazd: ciągu głównego, olbrzymów i nadolbrzymów typów O, B, A, może nawet i F. W tym przypadku nieprzezroczystość w liniach widmowych jest znacznie większa, niż w kontinuum. Nieprzezroczystość jednej silnej linii, np. rezonansowej linii C IV 1550 Å, łatwo może być o czynnik 10^6 większa, niż nieprzezroczystość dla rozpraszania na swobodnych elektronach.

Rozpatrzmy sytuację, w której atom porusza się radialnie, z prędkością v_r . Po absorpcji fotonu zmienia się pęd atomu

$$mv'_r = mv_r + \frac{h\nu}{c} \quad (5.16)$$

Jeśli atom wyemituje następnie pod kątem α foton $h\nu'$, to pęd wyniesie

$$mv_r'' = mv_r' - \frac{h\nu'}{c} \cos \alpha \quad (5.17)$$

Możemy obliczyć zmianę prędkości po absorpcji i następującej po niej emisji, korzystamy z założenia, że $v \ll c$ i $h\nu_0 \ll mc$

$$v_r'' - v_r = \frac{h\nu_0}{mc} (1 - \cos \alpha) \quad (5.18)$$

Widzimy, że rozpraszanie do przodu nie zmienia pędu atomu a rozpraszanie wstecz powiększa pęd o $2h\nu_0/c$. Ponieważ re-emisja zachodzi izotropowo – średnia zmiana pędu, czyli wycalkowana po sferze, wyniesie

$$\langle \Delta mv \rangle = \frac{h\nu_0}{c} \quad (5.19)$$

W konsekwencji wzrost pędu poprzez rozpraszanie izotropowe jest taki sam, jak dla zwykłej absorpcji fotonu. Izotropowe promieniowanie dyfuzyjne (to wtórne, rozproszone) już nie wpływa na rozpędzanie wiatru.

Dla przykładu przyjrzyjmy się typowym liczbom charakteryzującym wiatr rozpędzany liniami. Załóżmy, że jony napędzające wiatr stanowią 10^{-5} ilości wszystkich jonów i 10^{-4} masy (H i He praktycznie nie odgrywają roli w rozpędzaniu). Załóżmy ponadto, że typowa absorpcja powiększa prędkość jonu o 20 cm s^{-1} . Tym pędem trzeba obdzielić resztę gazu, więc efektywny wzrost prędkości będzie tylko $2 \cdot 10^{-3} \text{ cm/s}$. Zatem przyspieszenie wiatru do 2000 km/s wymaga 10^{11} absorpcji na jeden absorbujący jon. Prędkość graniczna wiatru osiągana jest na drodze kilku promieni gwiazdy, więc czas potrzebny do rozpędzenia jest rzędu $3 R_*/v_\infty \approx 10^4 \text{ s}$. Zatem jony rozpędzające muszą absorbować około 10^7 fotonów na sekundę, czyli rozpatrywane przejścia muszą zachodzić z poziomów o bardzo krótkich czasach życia $\tau \leq 10^{-7} \text{ s}$.

Rozpędzanie wiatru liniami staje się efektywne dzięki zjawisku Dopplera. W ten sposób w rozpędzaniu uczestniczy nie tylko wąski zakres częstości objętych linią widmową, ale całe pasmo częstości odpowiadające zakresowi prędkości przyspieszającego wiatru.

Rozpatrzmy przykład wiatru, który rozpędzany jest tylko jedną linią widmową, powiedzmy $h\nu_0$. Niech wiatr będzie bardzo gruby optycznie w tej linii. Strumień fotosferyczny w okolicach tej linii niech wynosi F_ν^* . Wiatr ma prędkość przy fotosferze prawie zerową, wzrastającą z odległością, osiągającą wartość graniczną v_∞ przy $r \rightarrow \infty$. Wszystkie fotony o częstości ν_0 będą zaabsorbowane tuż nad fotosferą. Wszystkie fotony o częstości $\nu_0(1 + v_\infty/c)$

będą zaabsorbowane w zewnętrznych warstwach wiatru rozpędzonych do prędkości granicznej. Fotony o częstościach pośrednich też będą zaabsorbowane. Całkowita energia zaabsorbowana ze strumienia fotosferycznego wynosi

$$L_{\text{abs}} = \int_{\nu_0}^{\nu_0(1+v_\infty/c)} 4\pi R_*^2 F_\nu d\nu \quad (5.20)$$

Gaz oprócz energii absorbuje także pęd pola promieniowania L_{abs}/c . Ten pęd jest przekazywany do wiatru

$$\dot{M}v_\infty = \frac{1}{c} \int_{\nu_0}^{\nu_0(1+v_\infty/c)} 4\pi R_*^2 F_\nu d\nu \approx \frac{4\pi R_*^2}{c} F_{\nu_0}^* \cdot \nu_0 \frac{v_\infty}{c} \quad (5.21)$$

Założyliśmy, że widmo ciągle jest stałe w przedziale całkowania, co jest dobrym przybliżeniem, bo dla typowej linii zakresu UV przedział ten to tylko ok. 15 Å. Otrzymaliśmy oszacowanie tempa utraty masy wiatru napędzanego jedną linią widmową, przy czym \dot{M} nie zależy od prędkości.

Jeśli linia widmowa wypada przy maksimum krzywej Plancka to można oszacować, że $\nu_{\text{max}} F_{\text{max}} \approx 0.62 \sigma T_{\text{eff}}^4$, a stąd

$$\dot{M} \approx 0.62 L/c^2 \approx L/c^2 \quad (5.22)$$

Dla gwiazdy o jasności $10^5 L_\odot$ oznacza to $\dot{M} = 6.8 \cdot 10^{-9} M_\odot/\text{rok}$. Jeśli wiatr ma więcej optycznie grubych linii, to tempo utraty masy odpowiednio mnożymy przez ich liczbę. Gwiazda o jasności $10^5 L_\odot$ przy 150 silnych liniach miałaby $\dot{M} = 10^{-6} M_\odot/\text{rok}$.

Istnieje górna granica \dot{M} , w przypadku, kiedy silnych linii jest tak dużo, że zachodzą na siebie w widmie i absorbują wszystkie fotony. W takim przypadku pęd wiatru będzie równy pędowi promieniowania

$$\dot{M}_{\text{max}} v_\infty = L/c \quad (5.23)$$

Jest to także górna granica dla przypadku jednokrotnego rozpraszania w wietrze, bo zakładaliśmy, że tylko pierwsze rozproszenie wpływa na przekazywanie pędu, a rozproszone fotony rozchodzą się mniej więcej izotropowo i nie rozpędzają wiatru. Jest to całkiem dobra górna granica na wiatry rozpędzane promieniowaniem i większość gwiazd nie przekracza tej granicy. Wyjątkiem są omawiane w dalszej części gwiazdy WR.

5.2 Wiatry gwiazd Wolfa-Rayeta

Przykładem obiektów, dla których mają zastosowanie rozważania z poprzedniego rozdziału, są tzw. gwiazdy WR.

5.2.1 Gwiazdy WR

Nazwa *gwiazdy Wolfa-Rayeta* (w skrócie: WR) pochodzi od nazwisk astronomów, którzy po raz pierwszy wyróżnili ten typ gwiazd na podstawie widocznych w widmie seriach jasnych linii. Był to rok 1867 i spektroskopia posiadała wówczas znacznie mniejsze od dzisiejszych możliwości. Ale półtora wieku później obiekty te są nadal intensywnie badane. Zanim przystąpimy do omawiania ich niezwykle aktywnych atmosfer, podamy krótką charakterystykę gwiazd WR, a zainteresowanego czytelnika odsyłam do przeglądowych artykułów w „Uranii/Postęпах Astronomii”: A.Niedzielskiego [26] oraz K.Gęsickiego i M.Schmidta ([10], [30]).

Wszystkie gwiazdy WR są ubogie w wodór, u wielu z nich w ogóle nie widać emisji wodorowych, a tam, gdzie są widoczne, obserwowany stosunek H/He jest znacznie mniejszy od słonecznego. Fakty te najlepiej wyjaśnia połączenie ewolucji gwiazdy z intensywną utratą masy przez silny wiatr. To właśnie silny wiatr jest odpowiedzialny za obecność linii emisyjnych oraz za usunięcie zewnętrznych części atmosfery i odsłonięcie warstw przynajmniej częściowo przeprocesowanych w reakcjach jądrowych.

Wyróżnia się trzy grupy gwiazd WR, choć ta ostatnia jest mniej znana

1. gwiazdy WN, których widma zdominowane są przez linie emisyjne He i N, widoczne są także linie C, a niektórych obiektach obserwuje się absorpcje i emisje H. Czyli na powierzchni gwiazd WN widać produkty reakcji CNO. Wyróżnia się dwie podklasy: WNE – wczesne, gorętsze i WNL – późne, chłodniejsze.
2. gwiazdy WC, których widma zdominowane są przez linie emisyjne He, C, O. Całkowity brak H. Na powierzchni widzimy produkty spalania helu.
3. gwiazdy WO – znane jest tylko kilka przypadków, od WC odróżnia je obecność silnych linii emisyjnych OVI 3811 i 3834 Å.

Opisując właściwości gorących gwiazd górnej części diagramu H-R można doszukać się ciągłości od gwiazd typu O do LBV (tzw. jasne niebieskie zmienne) i WN. W oparciu o modelowanie numeryczne proponowane są scenariusze ewolucyjne (zobacz artykuł przeglądowy Hillier [15])

dla $M_{\text{init}} > 60 M_{\odot}$: $O \rightarrow Of \rightarrow WNL \rightarrow WN7 \rightarrow WNE \rightarrow WC \rightarrow SN$

$40 < M_{\text{init}} < 60 M_{\odot}$: $O \rightarrow LBV \rightarrow WN8 \rightarrow WNE \rightarrow WC \rightarrow SN$

Nie są to jedyne możliwe scenariusze. W artykule Gęsickiego i Schmidta [10] omówione zostały bardziej szczegółowo inne propozycje ewolucji masywnych gwiazd górnej części diagramu H-R. Jeden przykład, zaczerpnięty z prac Langer i in. [18] i Garcia-Segura [9], podany jest w tabeli 5.1. Oprócz podtypów gwiazd WR wprowadzone zostały do schematu wspomniane wcześniej LBV, czerwone nadolbrzymy (RSG), żółte skrajne nadolbrzymy (YH) oraz faza przed wybuchem supernowej (pre-SN). W odróżnieniu od podanych wcześniej schematów, tym razem fazę LBV umieszczono pomiędzy bogatą w wodór pierwszą fazą WNL a ubogą w wodór powtórna fazą WNL. W tabeli podano masę, z którą gwiazda w daną fazę wchodzi oraz czas w niej spędzony. Dane te ukazują jak wiele materii jest w gwiazdach masywnych przetwarzane i rozpraszane jeszcze przed wybuchem supernowej.

gwiazda 60 M_{\odot}			gwiazda 35 M_{\odot}		
faza ewolucji gwiazdy	masa [M_{\odot}] na początku	długość fazy [w tys. lat]	faza ewolucji gwiazdy	masa [M_{\odot}] na początku	długość fazy [w tys. lat]
ciąg główny	60	2800	ciąg główny	35	4500
WNL	40	500	RSG	32	230
LBV	28	15	YH	15	20
WNL	20	30	WNL	14	70
WNE	18	40	WNE	12	120
WC	15	600	WC	10	30
pre-SN	4		pre-SN	9	

Tablica 5.1: W tabeli zestawione zostały poszczególne fazy życia masywnych gwiazd, w kolejności, która wynika z torów ewolucyjnych.

5.2.2 Problem pędu

Zajmiemy się obecnie najbardziej kłopotliwym problemem wiatrów gwiazd WR – problemem pędu (Cassinelli [4]). W rozdziale 5.1.4, poświęconym wiatrowi rozpędzanemu liniami widmowymi, argumentowaliśmy, że maksymalny pęd unoszony przez wiatr rozpędzany promieniowaniem będzie równy zaabsorbowanemu pędowi promieniowania (równanie 5.23)

$$\dot{M}_{\max} v_{\infty} = L/c \quad (5.24)$$

Jest to tzw. maksimum dla pojedynczego rozpraszania. Stosunek rzeczywistego tempa utraty masy do tego maksymalnego nazywamy współczynnikiem wydajności rozpędzania wiatru promieniowaniem

$$\eta_{\text{rw}} = \frac{\dot{M} v_{\infty}}{L/c} \quad (5.25)$$

Dla gwiazd typu O zachodzi $\eta_{\text{rw}} < 1$. Gwiazdy WR stanowią poważny problem, gdyż dla nich

$$\eta_{\text{rw}} = \text{od } 3 \text{ do } 100 \quad (5.26)$$

Co można zrobić z tym problemem?

1. poprawić teorię wiatrów napędzanych promieniowaniem w taki sposób, żeby przejmować więcej pędu z pola promieniowania?
2. znaleźć inne siły mogące rozpędzać szybki wiatr?
3. ominąć problem redukując \dot{M} ?

Warto pamiętać, że na tempo unoszenia pędu przez wiatr składają się zarówno tempo utraty masy jak i prędkość graniczna wypływu. Leer i Holzer [19] wprowadzili dwa „prawa teorii wiatrów”

- jeśli dodatkowy pęd lub energia dodawane są tylko w obszarach nadźwiękowych, rezultatem będzie wzrost prędkości granicznej bez wzrostu tempa utraty masy
- jeśli pęd lub energia dodawane są w rejonach poniżej punktu krytycznego, rezultatem będzie wzrost \dot{M}

Rezultat ten otrzymać można drogą numerycznego rozwiązywania równania pędu wiatru przy bardzo uproszczonym potraktowaniu przyspieszania promieniowaniem. Dokładne przyjrzenie się результатам takich obliczeń pozwala wyjaśnić co się dzieje głęboko w wietrze. Otóż obszary poddźwiękowe są niemal w równowadze hydrostatycznej i odkładanie w nich energii powoduje wzrost skali wysokości rozkładu gęstości. W rezultacie następuje wzrost gęstości ρ_s w punkcie krytycznym i w konsekwencji wzrost \dot{M}

$$\dot{M} = 4\pi \rho_s v_s r_s^2 \quad (5.27)$$

Omówimy obecnie kilka najważniejszych podejść do rozwiązania problemu pędu wiatrów WR.

Wiele linii widmowych

Klasyczne prace pokazały, że jedna linia (zob. rozdział 5.1.4), umieszczona przy maksimum rozkładu widmowego energii nadolbrzyma typu OB, może rozpędzić wiatr o tempie $\dot{M} = 10^{-8} M_{\odot}/\text{rok}$ i prędkości 3000 km/s. Prędkość jest mniej więcej poprawna, ale tempo utraty masy za małe. W rozwiązaniu problemu pomaga uwzględnienie wielu linii widmowych, z czym wiążą się dwa istotne zjawiska

1. wielokrotne rozpraszanie, czyli wielokrotne przekazywanie pędu tego samego fotonu
2. efekt „szklarniowy”, kiedy otoczka wokółgwiazdowa działa jak okrycie, czyli rozprasza z powrotem w kierunku gwiazdy znaczącą część (ponad 10%) promieniowania, powodując ogrzanie fotosfery

Z pewnością zjawisko „szklarniowe” zmienia strukturę fotosfery, tym niemniej dla dynamiki wiatrów gwiazdowych istotniejsze jest wielokrotne rozpraszanie i nim zajmijmy się obecnie.

Jednokrotne rozproszenie fotonu jest rozsądnym przybliżeniem, kiedy linie rozpraszające są od siebie odległe w długościach fali. Raz rozproszony foton nie ma szansy na powtórne rozproszenie w tej samej linii widmowej. Jest tak z powodu dużego gradientu prędkości sprawiającego, że na każdej odległości radialnej jest inne przesunięcie dopplerowskie i ta sama linia widmowa obejmuje inne częstotliwości pola promieniowania. Wielokrotne rozpraszanie jest możliwe, jeśli w innym miejscu otoczki inna linia widmowa zostanie dopplerowsko przesunięta tak, że pokryje się z częstotliwością danego rozproszonego fotonu.

Skąd się bierze ta dodatkowa energia przekazywana wiatrowi przez wielokrotne rozproszenie? Procesy rozpraszania nie tylko zmieniają kierunek fotonu, ale także powodują przesunięcie jego częstotliwości ku czerwieni o $\Delta\nu$. Energia $h\Delta\nu$ jest przekazywana wiatrowi. Maksimum pędu możliwego do przekazania osiągniemy wtedy, gdy wielokrotne rozpraszanie przesunie dopplerowsko częstotliwość fotonu w pobliże zera. I jest to granica wyznaczona przez zasadę zachowania energii.

Wielokrotne rozpraszanie wpływa na przekazywanie pędu raczej daleko od gwiazdy (kilka R_*), co zgadzałoby się z obserwacjami gwiazd WR wskazującymi na przyspieszanie wiatru do co najmniej $4 R_*$.

Obliczenia numeryczne pokazały, że wielokrotne rozpraszanie może powiększyć modelowane tempa utraty masy o czynnik około 10 dla gęstych wiatrów gwiazd WR, a około 2 dla gwiazd typu O.

Zmienność i niejednorodność

Szczegółowe obliczenia jednowymiarowe, ale zależne od czasu, wskazują, że większość masy tracona jest w postaci oddzielnych gęstych warstw. Można oczekiwać, że opracowane w przyszłości modele trójwymiarowe wykażą jeszcze mniejsze struktury i zagęszczenia. Wiadomo, że gwiazdy O i WR są źródłami promieniowania X. Niestabilności wiatrów napędzanych promieniście są naturalnym, choć jak na razie tylko jakościowym, wyjaśnieniem

pochodzenia promieniowania X powstającego w gorącym, ogrzanym falami uderzeniowymi gazie. W gwiazdach WR obserwuje się zmienność w profilach linii widmowych, z amplitudą do 10%, w postaci wąskich emisji nakładających się na szerokie linie emisyjne. Najłatwiej się ją interpretuje poprzez rozchodzące się w wietrze wielkoskalowe zagęszczenia.

Powyższe fakty podsuwają inne rozwiązanie problemu pędu, redukujące wielkość \dot{M} a więc i wydajność η_{rw} . Tempa utraty masy gwiazd WR wyznacza się najczęściej z obserwacji radiowych przy założeniu modelu wiatru sferycznego i gładkiego. Emisja radiowa materii wypełniającej daną objętość ΔV jest proporcjonalna do kwadratu gęstości $\Delta\epsilon \approx n^2\Delta V \approx \dot{M}/\Delta V$. Jeśli zatem materia wiatru nie jest rozłożona równomiernie, wypełniając jedynie ułamek f całej objętości, to $\Delta\epsilon$ ulegnie wzmocnieniu o czynnik $1/f$ przy zadanej gęstości n , czyli tempie utraty masy \dot{M} . Zatem tempo utraty masy niezbędne dla odtworzenia obserwowanej emisji ϵ może być znacznie mniejsze w przypadku niejednorodnych wiatrów. Tym niemniej zredukowanie \dot{M} o czynnik 100 wymaga wartości współczynnika wypełnienia $f = 10^{-4}$. Aż tak niejednorodne wiatry trudno sobie wyobrazić, więc same tylko zagęszczenia nie mogą dawać pełnego rozwiązania.

Rozkład kątowy promieniowania

W starszych pracach zakładano, że promieniowanie rozchodzi się radialnie ze źródła punktowego. Jest to dobre przybliżenie daleko od gwiazdy. Jednak w pobliżu tarczy gwiazdy pęd niesiony promieniowaniem posiada znaczącą składową nieradialną. Przybliżenie źródła punktowego powoduje wówczas przecenianie siły promieniowania. Przy prawidłowo uwzględnionym nieradialnym polu promieniowania dostępna energia gwiazdy powoduje mniejsze przyspieszanie w pobliżu gwiazdy i mniejsze prawdopodobieństwo penetracji β występujące w teorii Soboleva. Dalej od gwiazdy, w rejonach nadkrytycznych, pole promieniowania jest niemal radialne i może przyspieszać materię do dużych prędkości.

Równania wiatru z odpowiednimi poprawkami stają się na tyle skomplikowane, że rozwiązywać je można wyłącznie metodami numerycznymi. Rezultatem jest redukcja tempa utraty masy o czynnik 2–3, co poprawia zgodność z obserwacjami, ale dla gwiazd typów O i B. Dla gwiazd WR to działa, ale dla niedużych η_{rw} .

Rotacja

Rotacja w sposób naturalny powiększa wpływ w płaszczyźnie równikowej. Aby to wyjaśnić zauważmy, że na materię po opuszczeniu powierzchni

gwiazdy działają już tylko siły radialne – grawitacja i promieniowanie. Trajektorie cząstek będą zatem ograniczone tylko do płaszczyzn przechodzących przez środek gwiazdy. Gdy prędkość radialna jest większa od rotacyjnej, wtedy cząstki poruszają się niemal radialnie. W przeciwnym przypadku ich trajektorie w sposób naturalny zwracają ku płaszczyźnie równikowej. Tam jednak zamiast gładko przejść na drugą stronę, oddziałują z resztą wiatru i zagęszczają się. Można oszacowywać wielkość zagęszczenia równikowego w zależności od parametrów wiatru.

W gwiazdach typu B rozpędzanie promieniowaniem jest nieefektywne, więc spodziewane jest znaczne zagęszczenie równikowe. W ten sposób wyjaśnia się zjawisko gwiazd Be, choć szczegółowy jego opis powinien uwzględnić i inne czynniki. Dla gwiazd typu O prędkość graniczna wiatru znacznie przewyższa prędkość rotacji, więc mamy bardzo małe zagęszczenie równikowe.

Dla gwiazd WR prędkości rotacji są nieznane i nieznanym jest kształt prawa prędkości. Kształt obserwowanych linii emisyjnych zależy od obu powyższych czynników i trudno je rozdzielić. Z kolei argumenty obserwacyjne za i przeciw sferyczności są niejednoznaczne. Spłaszczone profile He I i C III sugerują sferyczną symetrię. Polaryzacja w zasadzie jest dobrym testem – jej obecność wyklucza sferyczną symetrię. W kilku najprawdopodobniej pojedynczych gwiazdach WR wykryto taką polaryzację, w kilku innych jej nie wykryto.

Czy istnieje wyjaśnienie problemu pędu?

W literaturze można znaleźć wiele innych prób wyjaśnienia tego zagadnienia. Wymieńmy tylko niektóre hasła dla ilustracji skali problemu

- uwzględnienie efektów jonizacyjnych: spadek jonizacji ze wzrostem promienia w wietrze
- możliwe jest, że tablice nieprzezroczystości Rosselanda dostarczają zbyt małych średnich nieprzezroczystości
- są podejrzenia, że listy linii uwzględnianych w obliczeniach są nadal niekompletne
- konstruuje się model rotatora magnetycznego z szybkim wypływem z obszarów biegunowych i wolnym z obszarów równikowych

Żadne z wymienionych podejść nie jest samo w sobie zadowalające. Najpoważniejszym czynnikiem są efekty wielu linii widmowych prowadzące do

wielokrotnego rozpraszania oraz efekty niejednorodności wiatru wzmacniające emisję radiową. Ponieważ każdy z tych efektów pozwala zredukować problem pędu o czynnik 10, więc działając razem otrzymujemy oczekiwany czynnik 100.

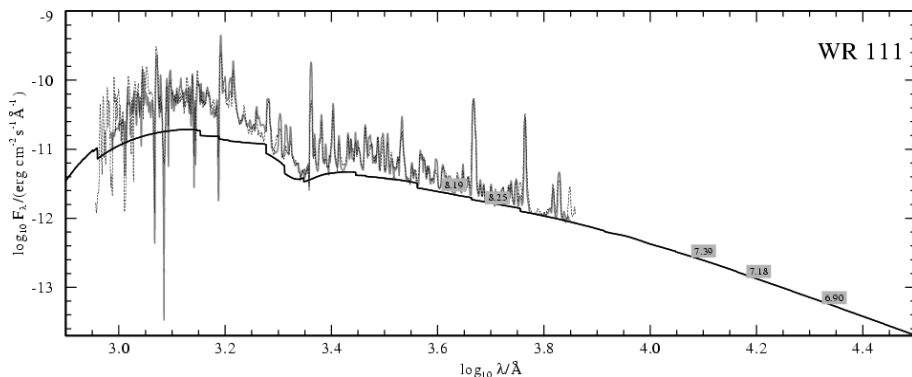
Byłoby tak dobrze, gdyby oba czynniki działały niezależnie i konstruktywnie. Okazuje się, że tak wcale nie jest. Za pomocą geometrycznych argumentów Brown i in. [2] pokazali, że w przypadku gdy zgęstnienia w wietrze są optycznie grube, to choć redukowane jest \dot{M} , redukowana jest również głębokość optyczna τ , przez co wielokrotne rozpraszanie staje się mniej efektywne. Redukcja rozpraszania staje się tak znaczna, że pogarsza problem zamiast go rozwiązywać. Ich argumentacja nie stosuje się wprawdzie do przypadku zgęszczeń optycznie cienkich, ale w tym przypadku osiągnięcie skrajnej wartości $\eta_{\text{rw}} = 100$ wymaga $f = 10^{-4}$. Nie wydaje się możliwe osiągnięcie aż takich kontrastów gęstości w wietrze, a poza tym trudno sobie wyobrazić, że tak gęste struktury pozostawałyby optycznie cienkie dla emisji radiowej.

Jak na razie problem pędu wiatrów gwiazd WR pozostaje nierozwiązany.

5.2.3 Modele

Dla ilustracji aktualnego stanu prac nad modelowaniem widma gwiazd WR przyjrzyjmy się pracy Gräfener & Hamann (2005). Autorzy zastosowali modele non-LTE z przepływem promieniowania w układzie współporuszającym się, z którymi połączono rozwiązania równań hydrodynamicznych, iterując pomiędzy jednym a drugim układem równań. Uwzględniono także efekt „szklarniowy”, dzięki czemu uzyskano rozpędzanie promieniowaniem zewnętrznych warstw wiatru, choć ten model zawodzi w warstwach głębszych. Na dużych głębokościach optycznych i przy wysokich temperaturach ok. 200 000 K rozpędzanie wiatru zapewnia duża nieprzezroczystość wysoko zjonizowanego żelaza. W sposób bardzo przybliżony uwzględniono niejednorodności wiatru, wprowadzając tzw. czynnik zagęszczeń, który obniża empirycznie wyznaczone tempo utraty masy, czyli redukuje problem pędu wiatru WR. Modele opisują poprawnie warunki panujące w atmosferach gwiazd WR oraz dostarczają widm syntetycznych pozwalających na bezpośrednie porównywanie z obserwacjami. Model ładnie odtwarza parametry typowej gwiazdy WC, otrzymane tempo utraty masy jest tylko nieznacznie większe, niż być powinno, a wynikowa prędkość graniczna wiatru jest bardzo bliska kanonicznej wartości 2000 km/s.

Rysunek 5.4 pokazuje porównanie z modelem dla obiektu WR 111 typu WC 5. Jakość dopasowania widma niestety nie jest na tyle dobra, by móc



Rysunek 5.4: Rysunek z pracy Gräfener & Hamann (2005): widmo modelowe gwiazdy WC wczesnego typu (linia szara) porównane z widmem obserwowanym obiektu WR 111 (linia czarna przerywana). Linia czarna ciągła pokazuje obliczone czyste kontinuum, ponadto zaznaczone są pomiary fotometryczne optyczne i podczerwone.

przeprowadzić szczegółową analizę, tym niemniej podstawowe cechy widmowe są odtworzone. Widać, na przykład, jak gęsto upakowane linie widmowe przesłaniają poziom kontinuum w prawie całym zakresie widma.

Dyskutując uproszczenia i niedomagania swojego modelu autorzy konkludują, że aby w pełni zrozumieć budowę i utratę masy gwiazd WR trzeba by opracować modele łączące ze sobą wnętrza i atmosfery gwiazd i jeszcze do tego poprawnie uwzględnić konwekcję. Wygląda na to, że wszystko, co można było osiągnąć stosując teorie astrofizyczne naszkicowane w niniejszej książce, zostało już zrobione. Dalszy rozwój prac modelowych we wskazanym kierunku, prowadzi do zbyt skomplikowanych, jak na współczesne komputery, programów numerycznych.

5.3 Wiatry rozpędzane pyłem

Rozpędzanie wiatrów pyłem ma miejsce w bardzo ograniczonej części diagramu H-R, dla T_{eff} od 2000 do 3000 K, dla jasności $\geq 10^5 L_{\odot}$ dla nadolbrzymów i dla $\geq 10^4 L_{\odot}$ dla gwiazd asymptotycznej gałęzi olbrzymów (AGB, z angielskiego „asymptotic giant branch” – zob. rozdz.5.4). Niskie temperatury sprzyjają tworzeniu się ziaren pyłu w zewnętrznych rejonach atmosfer a wielkie wartości stosunku jasności do masy zapewniają przyspieszanie przewyżające grawitację.

Pęd ziaren musi być przekazywany do gazu otaczającego ziarna, zatem

musi istnieć sprzężenie pędów pyłu i gazu. Siłą napędzającą wypływ gazu jest dryf ziaren pyłu poprzez gaz, gdy zderzenia przekazują pęd pociągając gaz za ziarnami. Gdy \dot{M} jest zbyt małe, ziarna pyłu nie mogą się tworzyć, a ponadto sprzężenie ziaren z gazem staje się niewydolne. Istnieje więc dolne ograniczenie tempa utraty masy i wynosi ono ok. $10^{-7} M_{\odot}/\text{rok}$. Istnieje też górne ograniczenie na prędkość wiatru gdy zbyt duża prędkość dryfu sprawia, że ziarna są niszczone.

Aktualne modele sugerują strukturę wiatru, w której istnieje bezpyłowy, rozciągły obszar fotosferyczny, leżący poniżej promienia kondensacji. Ziarna pyłu powodują wielki wzrost nieprzezroczystości, co raczej szybko powoduje przyspieszenie od poddźwiękowych do naddźwiękowych prędkości.

5.3.1 Ziarna pyłu

To, czy ziarno pyłu przeżyje i nie odparuje (wysublimuje), zależy jest od bilansu między ogrzewaniem przez promieniowanie gwiazdy a chłodzeniem przez emisję termiczną. Istnieje pewna minimalna odległość od gwiazdy, przy której ziarno będzie chłodniejsze, niż temperatura kondensacji, przy tym gęstość musi być wystarczająca dla wzrostu ziaren. Kiedy ziarna zaczynają narastać – nieprzezroczystość, blokująca strumień promieniowania, wzrasta o kilka rzędów wielkości. Ziarna absorbują energię, więc się ogrzewają, otrzymując również pęd fotonów.

Jednym z najtrudniejszych aspektów modelowania jest proces formowania ziaren i ich wzrostu. Rozkład rozmiarów tworzonych ziaren jest wynikiem współzawodnictwa procesu wzrostu rozmiarów przez akrecję i procesu rozpadu ziaren przez zderzenia z gazem. Typowy rozmiar ziaren pyłu mieści się między 0.05 a $0.1 \mu\text{m}$. Skład ziaren zależy od składu fazy gazowej: wokół gwiazd tlenowych tworzą się ziarna krzemianowe, wokół gwiazd węglowych ziarna węglkowe. Teorie kondensacji pyłu i wzrostu rozmiarów ziaren są ciągle w powijakach. Najczęściej omija się ten problem zakładając, że jeśli materia osiąga temperaturę kondensacji pyłu, to pył tworzy się natychmiast i w jednakowym rozmiarze ziaren.

5.3.2 Rozważania pędowe

Całkowity pęd promieniowania opuszczającego gwiazdę w jednostce czasu to

$$\frac{L_*}{c} \quad (5.28)$$

Część tego pędu może zostać przekazana do wiatru, wydajność tego sprzężenia określamy tak samo, jak w przypadku gwiazd WR (równanie 5.25)

$$\eta_{\text{rw}} = \frac{\dot{M}v_{\infty}}{L_*/c} \quad (5.29)$$

Przez lata sądzono, że η_{rw} jest bliskie 1. Przy tym założeniu można obliczyć maksymalne tempo utraty masy przy pojedynczym rozproszeniu

$$\dot{M}_{\text{max},1} = \frac{L_*}{v_{\infty} c} \quad (5.30)$$

Podstawiając typowe wartości dla gwiazd AGB otrzymujemy

$$\dot{M} = 2 \cdot 10^{-5} M_{\odot}/\text{rok} \quad (5.31)$$

Wielkość ta mieści się w obserwowanym zakresie \dot{M} dla gwiazd AGB, jest więc nienajgorszym, choć grubym oszacowaniem tempa utraty masy.

5.3.3 Łączony przepływ gazu i pyłu

Wiatr rozpędzany pyłem jest przepływem „wieloskładnikowym”. Obowiązują oddzielne równania pędu dla ziaren każdego z rozmiarów, oraz oddzielne równanie dla gazu. Równania dla pyłu i gazu są sprzężone, gdyż wskutek zderzeń wytwarzana jest siła wlokąca f_{drag} . To pył jest składnikiem wypływu mającym dużą nieprzezroczystość i przez to rozpędzanym przez promieniowanie gwiazdy. Gaz jest składnikiem hamującym, wypływa on na zewnątrz jedynie dzięki sile wlokącej.

Można zdefiniować wielkość Γ_d będącą stosunkiem przyspieszania promieniowaniem do grawitacyjnego

$$\Gamma_d = \frac{k_{\text{rp}} L_*}{4\pi c G M_*} \quad (5.32)$$

gdzie k_{rp} jest średnią nieprzezroczystością dla ciśnienia promieniowania. Możemy współczynnik nieprzezroczystości, przypadający na jednostkę masy, wyrazić przez przekrój czynny ziaren na ciśnienie promieniowania, który jest iloczynem gęstości ziaren n_d , przekroju geometrycznego πa^2 i wydajności Q zależnej od promienia ziarna i długości fali promieniowania. Otrzymamy

$$\Gamma_d = \frac{n_d \pi a^2 Q L_*}{\rho 4\pi c G M_*} \quad (5.33)$$

Równanie pędu (4.19) dla pyłu zapisujemy w postaci

$$v_d \frac{dv_d}{dr} = -\frac{GM_*}{r^2} + \frac{\pi a^2 Q L_*}{4\pi r^2 c m_d} - \frac{f_{\text{drag}}}{m_d} \quad (5.34)$$

gdzie m_d jest masą ziarna. W równaniu dla pyłu zaniedbaliśmy gradient ciśnienia, gdyż jest on znacznie mniejszy od absorbowanego ciśnienia promieniowania. Analizę możemy znacznie uprościć, jeśli założymy, że ziarna pyłu bardzo szybko osiągają prędkość graniczną, a cały pęd uzyskiwany z pola promieniowania przekazują do gazu. Skoro ziarna mają poruszać się ze stałą prędkością, to w równaniu pędu muszą równoważyć się dwie siły – siła promieniowania z siłą wlokącą. Bilans ten pozwala na wyznaczenie f_{drag} i wyeliminowanie tej siły z równania pędu dla gazu. Równanie pędu (4.19) dla gazu z dodatkową siłą f_{drag} zapiszemy następująco

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = n_d \frac{f_{\text{drag}}}{\rho} \quad (5.35)$$

A po wyeliminowaniu siły wlokącej otrzymamy

$$v \frac{dv}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} (1 - \Gamma_d) = 0 \quad (5.36)$$

To równanie można rozwiązywać numerycznie. Możemy wyznaczać poddźwiękową i naddźwiękową strukturę wiatru, zadając jedynie L_* , M_* , T_{eff} i skład chemiczny. Problem matematycznie jest dobrze określony. Obliczoną strukturę chcemy prównywać z obserwacjami. Okazuje się jednak, że wiatry prawdziwych gwiazd wyglądają inaczej. A jest tak, bo struktura atmosfery chłodnych nadolbrzymów modyfikowana jest silnie przez pulsacje i nie jest klasyczną hydrostatyczną atmosferą.

5.3.4 Hybrydowy wiatr czerwonych olbrzymów

Wyjaśnienie obserwowanych dużych temp utraty masy wymaga dużych gęstości w rejonie powstawania pyłu. W zasadzie jedynym sposobem osiągnięcia tego jest przyjęcie hybrydowej struktury takich wiatrów. Gwiazda może mieć tak duże M tylko wtedy, jeśli istnieje jakiś mechanizm drastycznie powiększający gęstościową skalę wysokości w atmosferze, w stosunku do takowej otrzymywanej w hydrostatycznej atmosferze. Większość chłodnych gwiazd wydaje się mieć rozciąglą atmosferę rozdymaną falami uderzeniowymi tworzonymi przez pulsacje gwiazdy centralnej.

Pulsacje prowadzą do fal stojących lub biegnących, w zależności od ich okresu. Fale rozchodzące się w ośrodku o malejącej gęstości narastają, przekształcając się w fale uderzeniowe. Materia podrzucona przez falę uderzeniową nie ma dość czasu by opaść balistycznie z powrotem, zanim nadejdzie nowa fala uderzeniowa. W rezultacie dochodzi do odsuwania materii na zewnątrz. Utrata masy może odbywać się z prędkościami znacznie mniejszymi od prędkości ucieczki, tak długo, jak tylko istnieją fale rozchodzące się w wietrze.

Większość energii potrzebnej do rozpędzenia wiatru do prędkości ucieczki jest dostarczana przez pulsacyjne lewitowanie. Obliczano \dot{M} dla pulsujących gwiazd z pyłem i bez pyłu, okazało się, że obecność pyłu powiększa \dot{M} o rzędy wielkości.

Szczegółowy opis pulsujących gwiazd przekracza ramy niniejszej pracy.

5.4 Wiatry gwiazd AGB

Jednymi z obiektów, dla których mają zastosowanie rozważania z poprzedniego rozdziału są tzw. gwiazdy AGB.

5.4.1 Gwiazdy asymptotycznej gałęzi olbrzymów

Gwiazdy określane często jako mało- i średniomasywne, o masach początkowych mniejszych od około $9 M_{\odot}$, po zakończeniu fazy ciągu głównego, czyli po wyczerpaniu wodoru w jądrze, przemieszczają się na diagramie H-R do jego chłodnej części, do gałęzi czerwonych olbrzymów (RGB). Ewoluuja ku górze RGB, spalając wodór w warstwie otaczającej narastające jądro helowe. Po przekroczeniu masy krytycznej następuje zapalenie helu w jądrze. Dalsze losy różnią się szczegółami w zależności od masy i składu chemicznego, jednak zmierzają do wspólnej fazy, kiedy to hel w jądrze zostanie przeprocesowany w węgiel i tlen a jądro stanie się zdegenerowane. Powraca spalanie wodoru w warstwie, wskutek czego wokół jądra narasta zdegenerowana warstwa helowa. Ta warstwa rozbłyśka za każdym razem po przekroczeniu masy krytycznej, wygaszając przy tym warstwę palącą wodór. Czyli dochodzi do naprzemiennego palenia wodoru i helu, mówimy o pulsach termicznych (TP), a gwiazdy w tym czasie ewoluują ku górze gałęzi olbrzymów, zmierzając tam niejako asymptotycznie, stąd i nazwa AGB. Z powodu wspomnianych pulsów często mówi się o fazie TP-AGB. Masa bogatej w wodór zewnętrznej otoczki cały czas maleje, zarówno z powodu zamiany wodoru w hel a następnie w C+O, jak i z powodu utraty masy przez wiatr. Gdy wodorowa otoczka stanie się bardzo mała, gwiazdy opuszczają AGB,

przemieszczają się na diagramie H-R w stronę wysokich temperatur, po drodze spędzając nieco czasu jako jądra mgławic planetarnych, by ostatecznie stopniowo stygnąć jako białe karły.

Dlaczego warto badać gwiazdy AGB?

1. są jasne, więc będą pierwszymi gwiazdami wykrywanymi w innych galaktykach
2. ewolucja powoduje zmiany składu chemicznego, które są widoczne na powierzchni
3. świecą głównie w podczerwieni, gdzie ekstynkcja zakłócająca obserwacje jest bardzo mała
4. utrata masy na AGB jest ważnym czynnikiem wpływającym na dalsze losy gwiazdy, a przez to na masy gwiazd centralnych mgławic planetarnych, białych karłów oraz poprzedniczek supernowych

5.4.2 Skład chemiczny

Skład chemiczny gwiazdy określony jest przez materię międzygwiazdową, z której gwiazda powstała. Ośrodek międzygwiazdowy zawiera więcej tlenu, niż węgla, więc w nowopowstałej gwiazdzie też jest więcej O, niż C. Konwekcja podczas pulsów termicznych może wynosić na powierzchnię pierwiastki świeżo wytworzone w jądrze, dotyczy to najbardziej węgla. Wyniesienie węgla na powierzchnię zmienia istotnie widmo gwiazdy (zauważono to już przed stu laty), ale niewiele wpływa na jej ewolucję.

Ze względu na skład chemiczny gwiazdy AGB dzielimy na podstawowe typy

- tlenowe („default”, gwiazdy typu M)
- węglowe (więcej C niż O)
- dość rzadki typ S o niemal równych obfitościach C i O

5.4.3 Zmienność

Zmienność jest kluczową cechą gwiazd czerwonych olbrzymów, ale nie jest uwzględniana w obliczeniach ewolucyjnych. Chłodne gwiazdy późnych typów widmowych klasyfikowane są jako

- zmienne typu L – regularne

- SR (semi regular) – półregularne, podtypy SRa, SRb, SRc, SRd
- Miry
- zmienne IRC – długookresowe
- gwiazdy OH/IR – z absorpcją $9.7 \mu\text{m}$ i emisją maserową OH

Podział gwiazd nie jest ściśle określony i klasyfikacja jest płynna. Warto jeszcze wymienić spotykane w literaturze typy zmiennych: LALPV – Large Amplitude Long Period Variable, oraz LPV – Long Period Variable.

5.4.4 Utrata masy

Otoczki wokół gwiazd TP-AGB przejawiają się na różne sposoby

1. emisja podczerwona kontinuum produkowana przez stałe cząstki
2. linie emisyjne przejść rotacyjnych różnych mlekuł
3. maserowe linie emisyjne
4. wokółgwiazdowe linie absorpcyjne zakresu widzialnego
5. rozpraszane w pobliżu gwiazd linie rezonansowe Na I i K I

Każda z obserwacji powyższych przejawów, po starannej analizie w oparciu o modelowanie numeryczne, może prowadzić do wyznaczenia tempa utraty masy przez gwiazdę. Liczne prace przeglądowe podsumowują wyznaczenia \dot{M} . Naturalną jest tendencja, by na podstawie wielu indywidualnych wyznaczeń \dot{M} wydedukować ogólną formułę na tempo utraty masy w zależności od parametrów gwiazdy. Taka formuła jest bardzo pożądana przez astrofizyków modelujących ewolucję gwiazd.

Chyba najbardziej znaną jest formuła Reimersa opisująca korelację między obserwowanym tempem utraty masy a kombinacją parametrów $L R/M$ dla czerwonych olbrzymów i nadolbrzymów

$$\dot{M}_R = \eta 4 \times 10^{-13} \frac{LR}{M} \quad (5.37)$$

gdzie L , R , M są wyrażone w jednostkach słonecznych, a \dot{M} w [M_\odot/rok]. Relacja wcześniej została zastosowana w obliczeniach ewolucyjnych gwiazd. Wkrótce stało się jasne, że podany wzór przeszacowuje utratę masy na pewnych etapach ewolucyjnych, a niedoszacowuje na samym wierzchołku AGB.

Stąd też pojawił się parametr η mający lepiej pogodzić obserwacje z modelami.

Willson [34], w przeglądowym artykule dotyczącym chłodnych gwiazd, pisze, że wśród astrofizyków modelujących szczegółowo utratę masy pod koniec fazy AGB, narasta przekonanie, że \dot{M} zależy bardziej stromo od parametrów gwiazdowych, niż wynika to z zależności empirycznych. Wszystko wskazuje na to, że ewolucja niemal do końca odbywa się przy masie gwiazdy niemal stałej, dopóki gwiazda nie dotrze „na krawędź przepaści (klifu)”, miejsca, gdzie

$$\frac{d \log M}{dt} \sim \frac{d \log L}{dt} \quad (5.38)$$

Wówczas mała ewolucyjna zmiana parametrów gwiazdowych (L , T_{eff} , M) powoduje katastrofalny wzrost \dot{M} i gwiazda traci swoją otoczkę w niemal wykładniczym tempie.

Skoro tak, to musi istnieć silna selekcja dotycząca gwiazd, dla których można wyznaczać tempo utraty masy. Te, które jeszcze nie dotarły do krawędzi, mają bardzo małe \dot{M} , a te poza krawędzią klifu żyją już bardzo krótko, przy tym są najprawdopodobniej mocno przysłonięte materią wokółgwiazdową.

5.4.5 Model standardowy gwiazdy AGB

Klasyczna gwiazda AGB to czerwony olbrzym ze sferycznym wypływem gazu, w którym to gazie w pewnej odległości tworzy się pył. Cząstki pyłu absorbują promieniowanie gwiazdy i reemitują je w podczerwieni, absorbują również pęd i przekazują go do gazu poprzez lepkość. Gaz jest przyspieszany na zewnątrz i ogrzewany, a chłodzi się przez obfite molekuly H_2O . W pewnej odległości molekuly H_2O ulegają dysocjacji na OH i H przez absorpcję fotonów UV międzygwiazdowego pola promieniowania. Rodniki OH także ulegają dysocjacji, więc OH może istnieć tylko w cienkiej warstwie. Emisja maserowa OH jest nieistotna w budżecie energetycznym gwiazdy, ale jest ważna jako widoczny znak obserwacyjny.

Kilka danych charakteryzujących typową gwiazdę AGB

- typowy promień gwiazdy $R_* = 3 \cdot 10^{13} \text{ cm} = 2 \text{ a.u.}$
- typowa jasność $L = 6000 L_\odot$
- typowa temperatura efektywna $T_{\text{eff}} = 2500 \text{ K}$
- wyznaczone \dot{M} od 10^{-7} do $10^{-4} M_\odot/\text{rok}$

- pył kondensuje przy 900 K, co równe jest temperaturze promieniowania w odległości $8 R_*$
- maser OH 1612 MHz lokuje się w odległości $1000 R_*$
- emisje CO pochodzą z wielkiego obszaru od 10 000 do 100 000 R_*
- typowa prędkość graniczna wypływu 10 km/s

5.4.6 Emisja termiczna pyłu

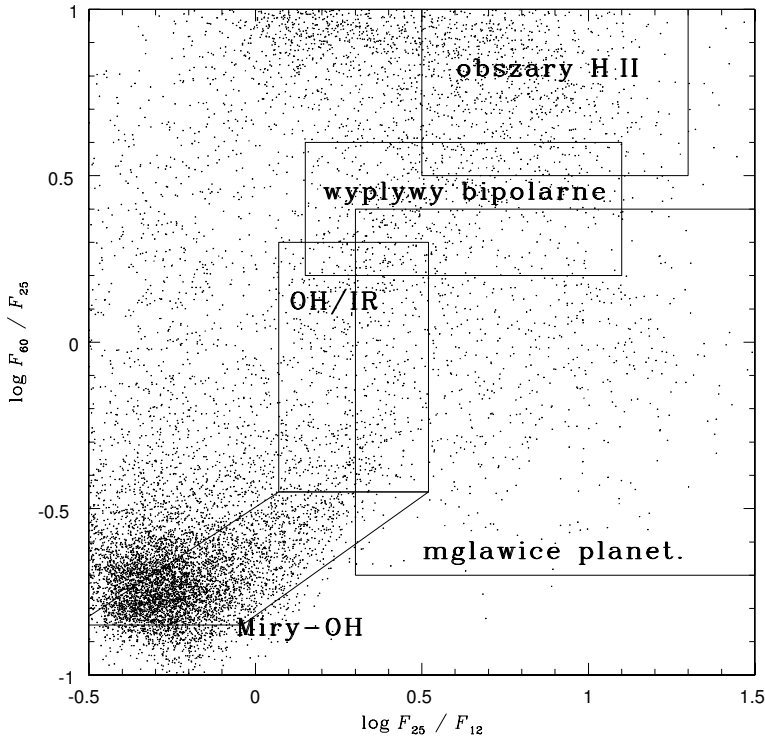
Gwiazdy AGB produkują prawie wszystkie składniki pyłu międzygwiazdowego; gwiazdy nowe, supernowe i WR wnoszą jedynie mały wkład. Gwiazda R CrB była pierwszym obiektem po Słońcu (światło zodiakalne) ze stwierdzoną obecnością pyłu wokółgwiazdowego. Pierwsze pomiary podczerwone wykazały, że czerwone olbrzymy często promieniują silniej, niż się spodziewano, a wokółgwiazdowe ziarna pyłu były tego przyczyną.

Wyróżniamy dwa podstawowe rodzaje cząstek pyłu: węglowe i krzemianowe. Istotna jest rola molekuly CO w tworzeniu pyłu albo węglowego albo krzemianowego

- CO jest cząstką silnie związaną i nie wiąże się z innymi cząstkami
- H i He nie biorą udziału w tworzeniu molekuł w $T > 500 \text{ K}$
- N wiąże się w N_2
- siarka jest wypierana z wiązań przez bardziej obfity tlen
- zatem wszystkie atomy węgla są więzione w molekułach CO, bo tlen jest bardziej obfity
- pozostałe pierwiastki mogące tworzyć molekuły to: Al, Fe, Si, Mg i O; są one obecne w krzemianach

Szczegóły tworzenia krzemianów są ciągle niezbadane, znacznie lepiej poznane jest tworzenie pyłu węglowego – sadzy (np. dane laboratoryjne przemysłu samochodowego).

Obliczenia modelowe otoczek wokółgwiazdowych wskazały na konieczność przyjęcia założenia, że krzemiany absorbują krótkofalowy zakres podczerwieni, a nie są przezroczyste, jak znane wówczas minerały. Te hipotetyczne wokółgwiazdowe krzemiany nazwano brudnymi. Doświadczenia wykazały, że obecność kationów Fe i Al w amorficznych krzemianach nadaje im cech właściwych z punktu widzenia modeli.



Rysunek 5.5: Diagram barwa-barwa obserwacji satelity IRAS. pokazane są pozycje kilkunastu tysięcy obiektów z katalogu IRAS. Podział na obszary według Zijlstra i in. [35].

W modelach zwykle zakłada się, że pył kondensuje w takiej odległości od gwiazdy, w której gęstość promieniowania, wycalkowana po wszystkich częstościach, równa jest tejże dla ciała doskonale czarnego o temperaturze T_{con} . Dla krzemianów T_{con} wynosi około 1000 K, zatem przy temperaturze fotosfery 2500 K kondensacja ma miejsce w odległości ok. 6 promieni gwiazdy.

Najnowsze sugestie są takie, że zewnętrzne rejony atmosfer chłodnych olbrzymów są niestabilne i spontanicznie rozdzielają się na chłodne i gęste kłębki rozdzielone gorącym gazem. Pył tworzy się w chłodnych zgęstkach i może to mieć miejsce na znacznie większym zakresie odległości.

Do dziś tajemnicą pozostaje emisja krzemianowa na $9.7 \mu\text{m}$ widoczna w kilku gwiazdach węglowych.

5.4.7 Fotometria podczerwona

Dane satelity podczerwonego IRAS stanowią największy zbiór obserwacji fotometrycznych. Zakres $100\ \mu\text{m}$ jest niewiarygodny, jest on często zanieczyszczony emisją międzygwiazdową. Z pozostałych danych: 12, 25 i $60\ \mu\text{m}$ tworzy się często diagram barwa-barwa. Przykład takiego diagramu pokazany jest na rysunku 5.5. Można na nim wskazywać obszary zajmowane przez źródła podczerwone różnego typu. Van der Veen i Habing [33] podzielili ten diagram (przy trochę innych definicjach kolorów) na 8 obszarów. Rysunek 5.5 pokazuje prostszą i czytelniejszą wersję podziału, według pracy Zijlstra i in. [35]. Kropkami zaznaczone są wszystkie pomiary IRASa o dobrej jakości we wszystkich trzech pasmach. Oczywiście obszary na diagramie są tylko „mniej więcej” jednorodne.

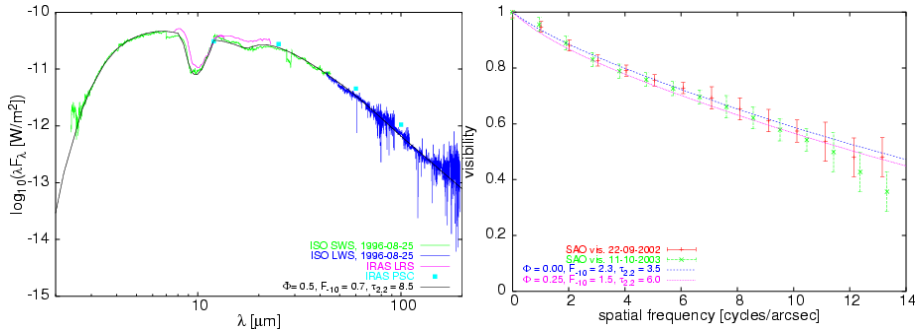
Istnieją także bazy danych fotometri J, H, K, L, M; danych spektrofotometrycznych, pomiary polaryzacyjne. Interferometria plamkowa dostarcza danych o strukturze obiektów, potwierdzając omawiane wcześniej szczegóły budowy gwiazd AGB. Interpretacja danych podczerwonych jest czasami niezbyt wiarygodna ze względu na ekstynkcję międzygwiazdową, zwłaszcza w pasmie $9.7\ \mu\text{m}$. Statystyki większych baz danych wykazują, że gwiazdy z nadwyżką emisji w bliskiej podczerwieni, to niemal zawsze LALPV.

5.4.8 Modelowanie widma gwiazd AGB

Często stosowanym narzędziem do analizowania obszarów z promieniującym pyłem jest program komputerowy o nazwie DUSTY, dostępny w sieci WWW¹. Program ten rozwiązuje równanie przepływu promieniowania w ośrodku pyłowym, uwzględnia rozpraszanie na ziarnach, absorpcję i emisję, oblicza rozkład temperatury oraz pole promieniowania w tym ośrodku. Jedno z najnowszych zastosowań tego oprogramowania pokazane jest na rysunku 5.6, pochodzącym z pracy Riechers i in. [28]. Autorzy analizowali widmo o małej dyspersji, tzw. SED (Spectral Energy Distribution) oraz funkcję widzialności interferometrii plamkowej, dla obiektu OH 104.9+2.4. Do obu tych zależności dopasowywano jednocześnie krzywe modelowe, rysunek pokazuje najlepszy rezultat.

Analizy tego rodzaju pozwalają na wyznaczenie licznych parametrów jednocześnie: temperatury efektywnej gwiazdy, temperatury pyłu w otocze, rozmiarów otoczki i rozkładu radialnego gęstości, rodzajów ziaren pyłu, stosunku pyłu do gazu oraz oczywiście tempa utraty masy. W omawianej pracy badano poza tym zmiany otoczki pyłowej z fazą pulsacji gwiazdy.

¹pod adresem www.pa.uky.edu/~moshe/dusty/



Rysunek 5.6: Widmo SED (z lewej strony) oraz funkcja widzialności na $2.12 \mu\text{m}$ (z prawej). Pokazane są zarówno dane obserwacyjne, jak i najlepiej dopasowane modele. Rysunek pochodzi z pracy Riechers i in. [28].

Choć różne modele stosują różne rozwiązania numeryczne, mają wiele wspólnych założeń

1. sferyczna symetria jest usprawiedliwiana kołowym kształtem map radiowych masera OH 1612 MHz, wspomniany powyżej przykład interferometrii plamkowej także potwierdza sferyczność otoczki, ale badania polaryzacji wprowadzają niepewność.
2. niezmiennie w czasie \dot{M} przyjmuje się jako wystarczająco dobre założenie, choć istnieją przypadki, kiedy utrata masy została gwałtownie zatrzymana. Zmiany rozchodzą się w wietrze zaburzając kolejne jego rejony: emisje w bliskiej podczerwieni reagują na zmiany \dot{M} sprzed kilkudziesięciu lat, podczas gdy zmiany sprzed 10 000 lat mogą jeszcze nie zakłócić emisji pyłu na falach milimetrowych.
3. przyjmuje się, że absorpcja pyłu jest znana, ale własności absorpcyjne krzemianów mogą się zmieniać z obiektu na obiekt, mogą się także zmieniać w miarę jak gaz oddala się od gwiazdy.
4. tradycyjnie zakłada się gęstość $\rho \sim r^{-2}$, co jest słuszne przy niezmiennym wypływie ze stałą prędkością. To założenie zawodzi w odległościach, na których pył powstaje.

Już pierwsze wersje diagramu barwa-barwa pokazały, że zmienne gwiazdy OH/IR układają się wzdłuż jednej linii, mniej więcej po przekątnej, w zależności od wersji diagramu. Modele teoretyczne są w stanie to wyjaśnić: kształt krzywej SED dla modeli otoczek z tego samego materiału zależy tylko od

jednego parametru – głębokości optycznej. Przyroda jednak najprawdopodobniej nie wytwarza tylko jednego rodzaju ziaren, dlatego zamiast jednej linii mamy na diagramie szeroki, ale wydłużony obszar. Otrzymano ciekawe rezultaty, gdy uwzględniono w modelach długookresową zmienność L_* oraz szczegóły narastania cząsteczek. W rezultacie w otoczce powstają fale uderzeniowe oraz warstwowa struktura rozkładu pyłu. Krokiem dalszym była konkluzja, że zmiany jasności gwiazdy wcale nie są niezbędne do zmienności rozciąglej atmosfery. Wpływ staje się niestabilny jeśli uwzględnić szczegóły formacji ziaren pyłu. Na razie obliczenia przeprowadzano dla cząstek węglowych, bo są lepiej poznane.

5.4.9 Linie emisyjne wzbudzone termicznie

Pierwsze obserwowane linie były liniami maserowymi OH. Pierwszą obserwowaną linią wzbudzaną termicznie była linia CO 115 GHz czyli $2.6 \mu\text{m}$. Linie termiczne pozwalają na szczegółowe badania otoczek, ale ponieważ nie są wzmacniane, są znacznie słabsze od maserowych. Większość ich obserwacji pochodzi z gwiazd nie dalszych niż 1–2 kpc.

Analiza linii CO wymaga szczegółowego modelowania. Zakłada się przy tym, że temperatura gazu nie ma wpływu na dynamikę otoczki, a gaz jest tylko włączony przez pył. Tlenek węgla CO jest najprawdopodobniej wytwarzany w fotosferze. Molekuła ta jest bardzo stabilna i jej obfitość nie zmienia się dopóki nie zostanie dysocjowana przez międzygwiazdowe promieniowanie UV. Cząstka CO jest wzbudzana przez fotony bliskiej podczerwieni oraz przez zderzenia z molekułami H_2 i atomami He. Obliczenia przepływu promieniowania prowadzi się najczęściej przy zastosowaniu metody Soboleva. Modele są ciągle odległe od ideału.

Zakończenie

Zdaję sobie sprawę z pobieżnego potraktowania wielu obecnych w książce tematów. Praca ta ma na celu zapoznanie z podstawami teorii przepływu promieniowania. Jeśli odczuwający niedosyt czytelnik sięgnie po prace oryginalne, będzie to oznaczało, że mój cel został osiągnięty. A jeśli ktokolwiek zechce podzielić się ze mną uwagami na temat lektury, sprawi mi wielką przyjemność. I być może zachęci mnie do opracowania poprawionej, rozszerzonej, lepszej wersji tekstu.

Krzysztof.Gesicki@astri.uni.torun.pl

Bibliografia

- [1] Affer L., Micela G., Morel T., Sanz-Forcada J., Favata F., 2005, *Astronomy & Astrophysics*, vol.433, p.647.
- [2] Brown J. C., Cassinelli J. P., Li Q., Kholtygin A. F., Ignace R., 2004, *Astronomy & Astrophysics*, vol.426, p.323.
- [3] Cannon C. J., „The transfer of spectral line radiation”, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.
- [4] Cassinelli J. P., 1991, w: K. A. van der Hucht and B. Hidayat (eds.), „Wolf-Rayet Stars and Interrelations with Other Massive Stars in Galaxies”, p.289.
- [5] Cox A. N., Stewart J. N., 1962, *Astronomical Journal*, vol.67, p.113.
- [6] Cox A. N., Tabor J. E., 1976, *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol.31, p.271.
- [7] Cox A. N., Stewart J. N., Eilers D. D., 1965, *Astrophysical Journal Supplement Series*, vol.11, p.1.
- [8] Eddington A. S., 1929, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol.89, p.620.
- [9] Garcia-Segura G., Langer N., Mac Low M.-M., 1996, *Astronomy & Astrophysics*, vol.316, p. 133.
- [10] Gęsicki K., Schmidt M., 1999, *Urania/Postępy Astronomii*, t.LXX, s.16.
- [11] Gräfener G., Hamann W.-R., 2005, *Astronomy & Astrophysics*, vol.432, p.633.
- [12] Gray D. F., „The observation and analysis of stellar photospheres”, John Wiley & Sons, 1976.

- [13] Grevesse N., Sauval A. J., 1999, *Astronomy & Astrophysics*, vol.347, p.348.
- [14] Heitler W., „The quantum theory of radiation”, Clarendon, Oxford, 1954.
- [15] Hillier D. J., 1996, w: C. S. Jeffery and U. Heber (eds.), „Hydrogen-Deficient Stars”, *ASP Conference Series*, vol.96, p.111.
- [16] Holzer T. E., 1987, „Theory of winds from cool stars” w: I. Appenzeller and C. Jordan (eds.) „Circumstellar Matter”.
- [17] Lamers H. J. G. L. M. i Cassinelli J. P., „Introduction to stellar winds”, Cambridge University Press 1999.
- [18] Langer N., Hamann W.-R., Lennon M., Najarro F., Pauldrach A. W. A., Puls J., 1994, *Astronomy & Astrophysics*, vol.290, p.819.
- [19] Leer E., Holzer T. E., 1980, *Journal of Geophysical Research*, vol.85, p.4681.
- [20] Lemke M., 1997, *Astronomy & Astrophysics Supplement Series*, vol.122, p.285.
- [21] Masai K., Ishida M., 2004, *Astrophysical Journal*, vol.607, p.76.
- [22] Masiewicz A. G. i Tutukow A. W., „Ewolucja gwiazd: teoria i obserwacje”, Moskwa, wydawnictwo „Nauka”, 1988.
- [23] Mihalas D., 1985, *Journal of Computational Physics*, vol.57, p.1.
- [24] Mihalas D., „Stellar Atmospheres”, Freeman, San Francisco, 1978.
- [25] Mihalas D., Kunasz P. B., 1986, *Journal of Computational Physics*, vol.64, p.1.
- [26] Niedzielski A., 1991, *Postępy Astronomii*, t.39, s.74.
- [27] Paczynski B., 1969, *Acta Astronomica*, t.19, s.1.
- [28] Riechers D., Balega Y., Driebe T., Hofmann K.-H., Men'shchikov A. B., Shenavrin V. I., Weigelt G., 2005, *Astronomy & Astrophysics*, vol.436, p.925.
- [29] Rosseland S., 1924, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol.84, p.525.

- [30] Schmidt M., Gęsicki K., 1998, *Urania/Postępy Astronomii*, t.LXIX, s.252.
- [31] Seaton M. J., Badnell N. R., 2004, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol.354, p.457.
- [32] Stępień K., „Fizyka atmosfer gwiazd – transport promieniowania”, Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego, 1983.
- [33] van der Veen W. E. C. J., Habing H. J., 1988, *Astronomy & Astrophysics*, vol.194, p.125.
- [34] Willson L. A., 2000, *Annual Review of Astronomy & Astrophysics*, vol.38, p.573.
- [35] Zijlstra A. A., Chapman J. M., te Lintel Hekkert P., Likkell L., Cameron F., Norris F. P., 2001, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, vol.322, p.280.

Indeks

- absorpcja, 14–17, 23, 29
- absorpcja w linii, 79
- atmosfera szara, 66
- atom dwupoziomowy, 9, 13, 22, 28, 35, 38, 47
- atom dwupoziomowy z kontinuum, 26, 41
- atom trójpoziomowy, 24, 39, 56
- chromosfera, 53, 59
- ciśnienie promieniowania, 45, 84, 124
- częściowa redystrybucja, 28, 89
- efekt szklarniowy, 112, 118
- emisja spontaniczna, 14, 15, 23, 31, 32, 37, 57
- emisja termiczna, 19
- emisja wymuszona, 14–16, 18, 23, 32, 37, 50, 57, 81
- funkcja źródłowa, 35, 40, 41, 48
- funkcja dystrybucji fotonów, 42
- funkcja Plancka, 27
- funkcja redystrybucji, 18, 32
- funkcja źródłowa, 15, 20, 35, 36
- gęstość energii promieniowania, 42
- głębokość optyczna, 16, 20, 75
- gwiazdy AGB – asymptotycznej gałęzi olbrzymów, 122, 126
- gwiazdy Wolfa-Rayeta, 114
- krzywa wzrostu, 81
- linia absorpcyjna, 78
- linia rozproszeniowa, 78
- lokalna równowaga termodynamiczna, LTE, 26, 38, 67, 79, 85, 86, 88
- momenty Eddingtona, 46, 63, 66, 76
- natężenie linii średnie, 24, 35, 38, 111
- natężenie promieniowania, 10, 13, 19, 21, 28, 37, 42, 45, 50, 110
- natężenie promieniowania średnie, 18, 43, 74
- non-LTE, 28, 38, 58, 88, 121
- pełna koherencja, 35, 89
- pełna redystrybucja, 35, 36, 89
- pęd wiatru gwiazdowego, 114, 116, 120, 124, 125
- pociemnienie brzegowe, 53, 68
- prawo Kirchhoffa, 19
- prawo Kirchhoffa-Plancka, 19
- prędkość dźwięku, 97, 99
- prędkość przepływu gazu, 94
- profil absorpcyjny, 28, 30, 52, 80
- profil Dopplerowski, 30, 109
- profil emisyjny, 31, 33
- profil Voigt’a, 30, 80
- promieniowanie termiczne, 19, 20, 75
- przejścia swobodno-swobodne, 17, 64
- przejścia zderzeniowe, 23, 33, 36–38, 40, 41, 56, 58

przejścia związane-swoobodne, 17, 26, 64
 przejścia związane-związane, 17, 64
 przybliżenie Eddingtona, 63, 64, 67
 punkt krytyczny, 97
 rozkład Maxwella prędkości, 27
 rozpraszanie, 17, 18, 40, 49, 64, 75
 rozwiązanie – metody numeryczne, 68
 rozwiązanie formalne, 22, 50
 równanie Boltzmanna, 27, 36
 równanie ciągłości, 95
 równanie dyfuzyjne, 61, 63, 71
 równanie pędu, 84, 95
 równanie przepływu promieniowania, 15, 20, 61, 66, 69, 76
 równanie równowagi statystycznej, 24, 35
 równanie Sahy, 27
 równanie zachowania masy, 95
 równowaga promienista, 60, 66, 68, 84, 85
 równowaga szczegółowa, 36, 38
 strumień energii wiatru, 101–103
 strumień promieniowania, 12, 43, 45, 61, 62, 67, 77, 85, 113
 szerokość równoważna, 79
 średnia Rosselanda, 64, 65, 120
 temperatura efektywna, 67, 83–85
 tensor przenoszenia pędu, 94
 termalizacja fotonu, 49
 warstwa płasko-równoległa, 12, 16, 20, 43, 46, 54, 61
 współczynnik absorpcji, 15, 16, 35, 86
 współczynnik absorpcji, średni, 63, 64
 współczynnik emisji, 18
 zderzenia z elektronami, 22, 23, 33, 35, 36, 40, 41, 49, 89
 zderzenia z pyłem, 123, 124
 zmienny czynnik Eddingtona, 46, 73